

UNIVERSAL
LIBRARY

OU_224618

UNIVERSAL
LIBRARY

سَلَامٌ عَلَيْكَ يَا مُحَمَّدُ

مساواتوں کا نظریہ

جَلْدُ الْقُلُوبِ

تَضَنُّفٌ

وٹلیو۔ ایس۔ برنسٹن ایم۔ اے، ڈی۔ ایس۔ سی

اے ڈیپلو سیٹن ایم۔ اے، ڈی۔ ایس۔ سی

ترجمہ

محمد نذیر الدین ایم۔ اے (عثمانیہ)

رکن دارالترجمہ جامعہ عثمانیہ کٹر عالی

۱۳۵۳ م ۱۲۴۲ ق ۱۹۳۲ ع

در این کتاب که در این کتاب است

فہرست مضامین

مساواتوں کا نظریہ

جلد اول

تمہید

صفحہ

دفعہ

۱
۲
۳

- ۱ - تعریفات -
- ۲ - عددی اور جبری مساواتیں -
- ۳ - کثیر الارقام -

پہلا باب

کثیر الارقام کے عام خواص

- ۴ - کثیر الارقام سے متعلق مسئلہ جبکہ متغیر کو بڑی قیمتیں دی جائیں -
- ۵ - متشابه مسئلہ جبکہ متغیر کو چھوٹی قیمتیں دی جائیں -

۹

صفحہ

- ۶ - متغیر کو بڑھانے سے یا گھٹانے سے کثیر الارقام کی شکل میں تبدیلی، مشتق تفاعیل - ۱۰
- ۷ - منطق صحیح تفاعیل کا تسلسل - ۱۳
- ۸ - خارج قسمت اور باقی کی شکل جبکہ کسی کثیر الارقام کو ایک ثنائی جملہ سے تقسیم کیا جائے - ۱۴
- ۹ - تفاعلوں کی جدول - ۱۶
- ۱۰ - کثیر الارقام کی تریسمی تفسیر - ۱۸
- ۱۱ - کثیر الارقام کی اعظم اور اقل قیمتیں - ۲۳

دوسرا باب

مساواتوں کے عام خواص

- ۱۴، ۱۳، ۱۲ - مساواتوں کی حقیقی اصولوں سے متعلق مسئلہ - ۲۴
- ۱۵ - عام مساوات میں ایک اصل کی موجودگی، خیالی اصلیں - ۲۷
- ۱۶ - مساوات کی اصولوں کی تعداد سے متعلق مسئلہ - ۲۸
- ۱۷ - مساوی اصلیں - ۳۲
- ۱۸ - مساواتوں میں خیالی اصلیں زوج زوج داخل ہوتی ہیں - ۳۳
- ۱۹ - مثبت اصولوں کے لئے ڈیکارٹ کا قانون علامت - ۳۶
- ۲۰ - منفی اصولوں کیلئے ڈیکارٹ کا قانون علامت - ۳۸
- ۲۱ - خیالی اصولوں کے وجود کو ثابت کرنے میں ڈیکارٹ کے قانون کا استعمال - ۳۸
- ۲۲ - وہ مسئلہ جو متغیر کی بجائے دو دئے ہوئے اعداد درج کرنے سے متعلق ہے - ۳۹

صفحہ

۴۱

دفعہ
مثالیں

تیسرا باب

ن
مساواتوں کے سروں اور اصولوں کے درمیان
روابط اور اصولوں کے متشاکل تفاعلوں کا استعمال

- ۲۳ - اصولوں اور سروں کے درمیان روابط - ۴۶
۲۴ - مسئلہ کے اطلاقات - ۴۸
۲۵ - مساوات کے درجہ کا تنزل جبکہ اسکی دو اصولیں
کوئی ربط موجود ہو - ۵۶
۲۶ - اکائی کے جذر الکعب - ۵۸
۲۷ - اصولوں کے متشاکل تفاعل - ۶۶
۲۸ - مثالیں - ۶۵
۲۸ - متشاکل تفاعلوں سے متعلق مسائل - ۷۳
مثالیں - ۷۴

چوتھا باب

مساواتوں کا استحالہ

- ۲۹ - مساواتوں کا استحالہ - ۸۴
۳۰ - اصلیں پہ تبدیل علامت - ۸۴
۳۱ - دی ہوئی مقدار سے اصولوں کو ضرب دینا - ۸۵

صفحہ	دفعہ
۸۸	۳۲ - متکافی اصلیں اور متکافی مساواتیں -
۹۰	۳۳ - اصول کو بقدر ایک دی ہوئی مقدار کے گھٹانا یا بڑھانا -
۹۴	۳۴ - رسموں کا اخراج -
۹۶	۳۵ - شنائی سر -
۱۰۱	۳۶ - کعبی -
۱۰۳	۳۷ - چار درجہ -
۱۰۶	۳۸ - ہم رسم استحالہ -
۱۰۸	۳۹ - متشکل تفاعلوں کے ذریعہ استحالہ -
	۴۰ - وہ مساوات بنانا جسکی اصلیں دی ہوئی مساوات کی
۱۱۰	اصلوں کی کوئی قوتیں ہوں -
۱۱۴	۴۱ - استحالہ کی عام صورت -
۱۱۶	۴۲ - کعبی کی مریج دار فرقوں کی مساوات -
۱۱۹	۴۳ - کعبی کی اصلوں کی جانچ -
۱۲۱	۴۴ - عام صورت میں فرقوں کی مساوات -
۱۲۲	مثالیں -

پانچواں باب

متکافی اور شنائی مساواتوں کا حل

۱۳۰	۴۵ - متکافی مساواتیں -
	۴۶ تا ۵۱ - شنائی مساواتیں - سائل جنہیں شنائی مساواتوں کے
۱۳۴	خاص خواص درج ہیں -
۱۳۸	۵۲ - لا - ۱ = کی عام اصلیں -
۱۴۳	۵۴ - شنائی مساواتوں کو دائری تفاعلوں کے ذریعہ حل کرنا -

صفحہ

۱۴۵

دفعہ

مثالیں

چھٹا باب

کعبی اور چار درجہ کا جبری حل

- ۵۵ - مساواتوں کا جبری حل - ۱۵۵
- ۵۶ - کعبی مساوات کا جبری حل - ۱۵۹
- ۵۷ - عددی مساواتوں پر استعمال - ۱۶۱
- ۵۸ - کعبی کو دو کعبوں کے فرق کی شکل میں بیان کرنا - ۱۶۲
- ۵۹ - اصولوں کے متشاکل تفاضلوں کے ذریعہ کعبی کا حل - ۱۶۳
- مثالیں
- ۶۰ - کعبی کی دو اصولوں کے درمیان ہم رسم ربط - ۱۶۶
- ۶۱ - چار درجہ کا پہلا حل جذروں کے ذریعہ - ۱۶۷
- مثالیں - ۱۸۳
- ۶۲ - جذروں کے ذریعہ چار درجہ کا دو سہرا حل - ۱۸۷
- ۶۳ - چار درجہ کو دو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنا - ۱۹۰
- ۶۴ - چار درجہ کو دو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنا - دو سہرا طریقہ - ۱۹۶
- ۶۵ - چار درجہ کا استحالہ متکافی شکل میں - ۱۹۹
- ۶۶ - اصولوں کے متشاکل تفاضلوں سے چار درجہ کا حل - ۲۰۴
- ۶۷ - چار درجہ کی مربع دار فرقوں کی مساوات - ۲۰۹
- ۶۸ - چار درجہ کی اصولوں کی نوعیت کی جانچ - ۲۱۲
- مثالیں - ۲۱۴

صفحہ

دفعہ

ساتواں باب

مشتق تفاعلوں کے خواص

- ۶۹ - مشتق تفاعلوں کی تربیتی تعبیر - ۲۲۹
- ۷۰ - کثیر الارقام کی اعظم اور اقل قیمتوں سے متعلق مسئلہ - ۲۳۰
- ۷۱ - رول کا مسئلہ - نتیجہ صریح - ۲۳۳
- ۷۲ - مشتق تفاعلوں کی ترکیب - ۲۳۴
- ۷۳ - ضعیفی اصولوں سے متعلق مسئلہ - ۲۳۵
- ۷۴، ۷۵ - وہ مسئلے جو مسادات کی ایک اصل میں سے متغیر کے
مرور سے متعلق ہیں - ۲۳۹
- مثالیں - ۲۴۱

آٹھواں باب

اصولوں کے متشاكل تفاعل

- ۷۷ - نیوٹن کا مسئلہ اصولوں کی قوتوں کے مجموعوں پر،
مسئلہ ۱ - ۲۴۵
- ۷۸ - کسی جبری مسادات کی اصولوں کے متشاكل تفاعل کو
سروں کی رقوم میں منطبق طور پر بیان کرنا - مسئلہ ۲ - ۲۴۸
- ۷۹ - اصولوں کی قوتوں کے مجموعوں کو سروں کی رقوم میں
بیان کرنے کے لئے ایک اور مسئلہ - مسئلہ ۳ - ۲۵۲
- ۸۰ - سروں کو اصولوں کی قوتوں کی رقوم میں بیان کرنا - ۲۵۳
- ۸۱ - متشاكل تفاعلوں کا رتبہ اور وزن اور رتبہ سے متعلق مسئلہ - ۲۵۶

صفحہ	دفعہ
۲۵۹	۸۲ - اصولوں کے متشاکل تفاعلوں کو محسوب کرنا۔
۲۶۵	۸۳ - متجانس حاصل ضرب۔

نوال باب

مساواتوں کی اصولوں کی انتہائیں

۲۶۹	۸۴ - انتہاؤں کی تعریف۔
۲۷۰	۸۵ - اصولوں کی انتہائیں۔ مسئلہ ۱۔
۲۷۱	۸۶ - اصولوں کی انتہائیں۔ مسئلہ ۲۔
۲۷۳	۸۷ - عملی اطلاقات۔
۲۷۶	۸۸ - انتہائیں معلوم کرنیکا نیوٹن کا طریقہ۔ مسئلہ ۳۔
۲۷۹	۸۹ - سفلی انتہائیں اور منفی اصولوں کی انتہائیں۔
۲۷۹	۹۰ - انتہائی مساواتیں۔
۲۸۱	مثالیں۔

دسوال باب

مساواتوں کی اصولوں کو جد کرنا

۲۸۳	۹۱ - عام تشریح۔
۲۸۴	۹۲ - فوریر اور بوڈان کا مسئلہ۔
۲۸۷	۹۳ - اس مسئلہ کا استعمال۔
۲۹۲	۹۴ - اس مسئلہ کا استعمال خیالی اصولوں پر۔
۲۹۶	۹۵ - فوریر اور بوڈان کے مسئلہ سے نتائج صریح۔

صفحہ	رقعہ
۲۹۷	۹۶ - اسٹرم کا مسئلہ -
۳۰۷	۹۷ - اسٹرم کا مسئلہ - مساوی اصلیں -
۳۱۱	۹۸ - اسٹرم کے مسئلہ کا استعمال -
۳۱۷	۹۹ - مساوات کی اصلوں کے حقیقی ہونی کی شرطیں -
۳۱۹	۱۰۰ - چار درجہ کی اصلوں کے حقیقی ہونی کی شرطیں -
۳۲۰	مثالیں -

گیارہواں باب

عددی مساواتوں کا حل

۳۲۶	۱۰۱ - جبری اور عددی مساواتیں -
۳۲۷	۱۰۲ - متوافقہ اصلوں سے متعلق مسئلہ -
۳۲۸	۱۰۳ - نیوٹن کا مقسوم علیہم کا طریقہ -
۳۳۰	۱۰۴ - مقسوم علیہم کے طریقہ کا استعمال -
۳۳۴	۱۰۵ - آزمائشی مقسوم علیہم کی تعداد کو محدود کرینے کا طریقہ -
۳۳۶	۱۰۶ - ضعیفی اصلوں کی تعیین -
۳۴۱	۱۰۷ - نیوٹن کا تقرب کا طریقہ -
۳۴۳	۱۰۸ - عددی مساواتوں کو حل کرنے کے لئے بارنر کا طریقہ -
۳۴۸	۱۰۹ - آزمائشی مقسوم علیہم کا اصول -
۳۵۴	۱۱۰ - بارنر کے عمل کا اختصار -
۳۵۹	۱۱۱ - بارنر کے طریقہ کا استعمال مساوی اصلوں کی صورت میں -
۳۶۴	۱۱۲ - تقرب کا لگراج کا طریقہ -
۳۶۶	۱۱۳ - ڈیکارٹ کے طریقہ سے چار درجہ کا عددی حل -
۳۶۹	متفرق مثالیں -

دفعہ

صفحہ

بارہواں باب

ملف اعداد اور ملف متغیر

- ۱۱۴ - ملف اعداد - تریبی تقبیر - ۳۷۷
- ۱۱۵ - ملف اعداد - جمع اور تفریق - ۳۷۹
- ۱۱۶ - ضرب اور تقسیم - ۳۸۱
- ۱۱۷ - ملف عددوں پر دیگر اعمال - ۳۸۲
- ۱۱۸ - ملف متغیر - ۳۸۲
- ۱۱۹ - ملف متغیر کے تفاعل کا تسلسل - ۳۸۵
- ۱۲۰ - تفاعل کی سمت کا تغیر جب ملف متغیر چھوٹا بند مخرجی مرتسم کرے - ۳۸۶
- ۱۲۱ - کوششی کا مسئلہ - ۳۸۹
- ۱۲۲ - عام مساوات کی اصولوں کی تعداد سے متعلق بنیادی مسئلہ کا ثبوت - ۳۹۱
- ۱۲۳ - بنیادی مسئلہ کا دوسرا ثبوت - ۳۹۲
- ۱۲۴ - ملف عددی اصولوں کی تعین - کعبی کا حل - ۳۹۴
- ۱۲۵ - چار درجہ کا حل - ۳۹۹
- ۱۲۶ - چار درجہ کا حل (گندشتہ سے پیوستہ) - ۴۰۳

نوٹ (۱) - مساواتوں کا جبری حل

صفحہ

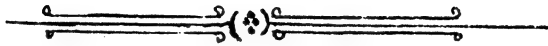
۴۱۵

نوٹ (ب)۔ عددی مساواتوں کا حل

نوٹ (ج)۔ یہ مسئلہ کہ ہر مساوات کی ایک اہل ہوتی ہے۔ ۴۲۱

۴۲۵

اشاریہ۔



(1)

مساواتوں کا نظریہ

تمہید

۱۔ تعریفات :- کسی ریاضی جملہ کو جس میں ایک مقدار شامل ہو اس مقدار کا تفاعل کہتے ہیں۔
 ہیں خاص کر ایسے جبری جملوں سے سابقہ پڑے گا جو منطق اور مکملہ ہونگے کسی مقدار کے منطق تفاعل سے وہ تفاعل مراد ہے جس میں یہ مقدار صرف منطق شکل میں موجود ہو یعنی ایسی شکل میں جو کسری قوت نما اور علامت جذر سے آزاد ہو۔ کسی مقدار کے مکملہ تفاعل سے وہ تفاعل مراد ہے جس میں یہ مقدار صرف مکملہ شکل میں موجود ہو یعنی کسر کے نسب نما میں ہرگز نہ آئے۔ مثلاً جلا ذیل جس میں ن مثبت صحیح عدد ہے لاکا ایک منطق اور مکملہ جبری تفاعل ہے :-

$$لا + ب لا^{-۱} + ج لا^{-۲} + + ک لا^{-ل}$$

یہ یاد رہے کہ یہ تعریف صرف مقدار لا کے لحاظ سے ہے جس کا جلیا لا تفاعل قرار دیا گیا ہے۔ مختلف سر 'ا' ب 'ج' وغیرہ غیر منطق یا کسری ہو سکتے ہیں اور پھر بھی لا کا یہ تفاعل منطق اور مکملہ ہوگا۔
 اختصار کی خاطر لا کا تفاعل فا (لا) ف (لا) فہ (لا) یا ایسی ہی

(۵)

کسی علامت سے تعبیر کیا جاتا ہے۔
ایسے جبری تغافل کو کثیر الارقام اس وجہ سے کہا جاتا ہے کہ وہ لا کی
مختلف قوتوں والی رقوموں سے جو مثبت یا منفی علامتوں سے ملا دی
گئی ہوں بنتا ہے۔

اگر لا کو متغیر قرار دیا جائے تو اس کی بعض قیمتوں کے لئے ایک کثیر الارقام
دوسرے کثیر الارقام کے مساوی ہو سکتا ہے جو بالکل جداگانہ طور پر بنا ہو۔ اس
قسم کے ربط کو اگر جبری طور پر نظام کیا جائے تو اس کو مساوات کہتے ہیں
اور لا کی کوئی قیمت جو اس مساوات کو پورا کرے اس مساوات کی اصل کہلاتی
ہے۔ تمام ممکن اصولوں کو معلوم کرنے کا نام مساوات کا مکمل حل ہے۔
یہ ظاہر ہے کہ تمام رقوموں کو ایک طرف لانے سے ہم کسی مساوات کو
لا کی نزدیکی قوتوں میں حسب ذیل طریقہ پر ترتیب دے سکتے ہیں:-

$$لا + لا^1 + لا^2 + لا^3 + + لا^n + لا^{n+1} = 0$$

اس مساوات میں چونکہ بڑی سے بڑی قوت $لا^n$ ہے اس لئے اس کو
لائن $لا^n$ میں درجہ کی مساوات کہتے ہیں۔ ایسی مساوات کے لئے
ہم عام طور پر شکل مندرجہ بالا استعمال کریں گے۔ اس کے لائحہ سے معلوم ہو سکتا
ہے کہ کونسا عددی سر لا کی کس قوت کے ساتھ ہے کیونکہ ہر رقوم میں لا کی قوت
اور اس کے لائحہ کا مجموعہ $لا^n$ رہتا ہے۔ کوئی مساوات نہیں بدلتی اگر ہم
اس کی ب رقوموں کو کسی مقدار سے تقسیم کریں۔ اس لئے اگر ہم چاہیں تو اسے
تقسیم کر کے مساوات $لا^n$ کا سر ایک بنا سکتے ہیں۔ اس قسم کا عمل اکثر سہولت
بخش ہوگا اور ایسی صورتوں میں مساوات بالاشکل

$$لا + لا^1 + لا^2 + لا^3 + + لا^n + لا^{n+1} = 0$$

میں لکھی جائے گی۔
مساوات کو مکمل ہم اس وقت کہیں گے جب اس میں $لا^n$ سے صفر تک

تو ت رکھنے والی لاکھ سب رقمیں موجود ہوں اور غیر مکمل اس وقت جب بعض رقمیں موجود نہ ہوں یعنی جب سب، سب، سب، وغیرہ سروں میں سے بعض صفر کے مساوی ہوں۔ رقم سب ن کو جس میں لاشا مل نہیں ہے مطلق رقم کہتے ہیں۔ مساوات کو عددی یا جبری کہا جائے گا جو جب اس کے کہ اس کے سر اعداد یا جبری حروف ہوں۔

۲۔ عددی اور جبری مساواتیں۔ ریاضیات و طبیعیات کی اکثر تحقیقوں

میں بالآخر ہم ایک ایسے ریاضی مسئلہ پر پہنچتے ہیں جو ایک مساوات کی شکل میں رونما ہوتا ہے اور اس مساوات کے حل پر اس مسئلہ کا حل منحصر ہوتا ہے۔ اس لئے یہ فطری بات ہے کہ تاریخ سائنس کی ابتدائی منزل میں ہی علماء ریاضی کی توجہ اس نوعیت کے سوالات کی طرف منعطف ہوئی چنانچہ نظریہ معادلات کا علم جو اس وقت موجود ہے علماء ریاضی کی مسلسل کوششوں کا نتیجہ ہے جو انہوں نے کسی درجہ کی مساواتوں کے حل کرنے کے لئے عام طریقوں کے دریافت کرنے میں صرف کیں۔ جب کسی مساوات کے سر دئے ہوئے اعداد ہوں تو ایسی عددی قیمت یا جہاں ممکن ہو ایسی مختلف عددی قیمتوں کے دریافت کر نیکا مسئلہ پیش ہوتا ہے جو اس مساوات کو پورا کریں۔ نظریہ معادلات کے اس شعبہ میں بہت بڑی ترقی ہو چکی ہے اور اصلوں کی عددی قیمتوں کو معلوم کرنے کے بہترین طریقے جواب تک معلوم ہوئے خواہ یہ قیمتیں تقریبی ہوں یا بالکل ٹھیک اس کتاب میں اپنے اپنے مناسب مقام پر درج کئے جائیں گے۔

اتنی ہی ترقی ان مساواتوں کا عام حل دریافت کرنے میں نہیں ہوئی جن کے سر جبری حروف ہوں مثلاً علم یہ جانتا ہو گا کہ مساوات درجہ دوم کی اصل کو ایک عام ضابطہ کی شکل میں سروں کی رقم میں بیان کیا جاسکتا ہے جبکہ مساوات کے سر حروف سے تعبیر ہوں اور یہ کہ کسی خاص عددی مساوات کی عددی اصلیں اس ضابطہ میں حروف کی بجائے متناظر اعداد مندرج کرنے سے حاصل ہو سکتی ہیں۔ اس لئے فطرتاً یہ سوال پیدا ہوا کہ آیا اسی قسم کا ضابطہ اعلیٰ درجوں کی مساواتوں کے

حل کے لئے دریافت کرنا ممکن ہے چنانچہ اس قسم کے ضابطے تیسرے اور چوتھے درجہ کی مساداتوں کے لئے حاصل کر لئے گئے ہیں لیکن اس کے ساتھ یہ بات بتا دینا ضروری ہے کہ بعض صورتوں میں ان ضابطوں میں حروف کی بجائے عددوں کے اندراج سے صحیح حل نہیں ملتا اور اس لئے اس لحاظ سے یہ ضابطے مساوات درجہ دوم کے جبری حل سے کمتر درجہ رکھتے ہیں۔

پانچویں اور اس سے اعلیٰ درجوں کی مساداتوں کے حل کے لئے اس قسم کے عام ضابطوں کو دریافت کرنے میں از حد کوششیں کی گئیں لیکن تحقیقات جدید سے یہ بات پایہ ثبوت کو پہنچ چکی ہے کہ پانچویں یا اس سے اعلیٰ درجہ کی مساوات کی اصل کو جذری علامتوں اور جبر و مقابلہ کے دوسرے عام اعمال کی مدد سے سروں کی رقوم میں بیان کرنا ناممکن ہے۔

۳۔ کثیر الارقام۔ مشاہدات مابقی سے ظاہر ہے کہ نظریہ معادلات کے علم (۴)

کا ایک اہم مقصد متغیر مقدار لاکھ وہ قیمتیں معلوم کرنا ہے جن کے اندراج سے کثیر الارقام ف (لا) کی قیمت صفر ہو جائے۔ لاکھ ایسی قیمتوں کو معلوم کرنے کی کوشش میں متعدد سوالات پیش ہو گئے جو لاکھ دوسری قیمتوں کے لئے کثیر الارقام کی اختیار کردہ قیمتوں سے متعلق ہوئے۔ چنانچہ آئندہ باب میں فی الواقعہ ہم یہ دیکھیں گے کہ لا انتہا بڑی منفی مقدار (—∞) سے لا انتہا بڑی مثبت مقدار (+∞) تک متغیر ہونے والی لاکھ قیمتوں کے مسلسل سلسلہ کے جواب میں ف (لا) بھی ایسی قیمتیں اختیار کرتا ہے جو مسلسل بدلتی ہیں۔ اس قسم کے تغیرات کا علم کثیر الارقام کے نظریہ کا ایک بہت ہی اہم حصہ ہے۔ عددی مساداتوں کا عام حل فی الحقیقت محنت طلب عمل ہے اور متغیر لاکھ بعض اختیاری قیمتوں کے جواب میں کثیر الارقام کی اختیار کردہ قیمتوں پر غور کرنے سے گو ہم خود اصل کو نہ معلوم کر سکیں کم از کم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ مساوات کی اصل کون حدود کے اندر واقع ہے اور پھر اپنے عمل کو وسیع تر کر کے زیادہ قریب تر حدود دریافت کر سکتے ہیں۔

کثیر الارقام کو بعض اوقات کثیر درجی (Quantie) کہا جاتا ہے۔
مختلف درجوں کے کثیر درجی جملوں کو مختلف نام دینا سہولت بخش ہے چنانچہ
دو درجی سر درجی (کبھی) چہار درجی، پنج درجی شش درجی وغیرہ ان
کثیر درجی جملوں کو تعبیر کرنے میں استعمال ہونگے جو علی الترتیب دوسرے تیسرے
چوتھے، پانچویں، چھٹے وغیرہ درجوں کے ہوں۔ ان کثیر درجی جملوں کو
صفر کے مساوی رکھنے سے جو مساواتیں حاصل ہوتی ہیں ان کو علی الترتیب
مساوات درجہ دوم، مساوات درجہ سوم یا کبھی مساوات، مساوات درجہ چہارم وغیرہ
کہتے ہیں۔



۷۸۶

پہلا باب

کثیر الارقام کے عام خواص

(5)

۴۔ متغیر (لا) کی مختلف قیمتوں کے متناظر کثیر الارقام کی قیمت میں تبدیلیوں کا مشاہدہ کرتے وقت ہمیں پہلے یہ دریافت کرنا ہو گا کہ جب متغیر لا کو بہت بڑی یا بہت چھوٹی قیمت دیکھائے تو کثیر الارقام میں اہم ترین حصہ لینے والی ارقام کونسی ہوں گی۔ اس باب کے مختلف دفعات میں اسی پر روشنی ڈالی جائیگی۔

کثیر الارقام $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$ کو شکل

$$\frac{1}{n} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right]$$

میں رکھنے سے ظاہر ہے کہ جب 'لا' کی طرف مائل ہوتا ہے تو کثیر الارقام کی قیمت رقم $\frac{1}{n}$ کی طرف مائل ہوتی ہے۔ مسئلہ ذیل سے ایک ایسی مقدار معلوم ہو سکے گی کہ اس کو یا اس سے بڑی مقدار کو لا کی بجائے کثیر الارقام میں مندرج کریں تو رقم $\frac{1}{n}$ کی قیمت باقی تمام ارقام کی مجموعی قیمت سے بڑی ہوگی۔ آئندہ ہم $\frac{1}{n}$ کو مثبت فرض کریں گے اور بالعموم مساداتوں اور کثیر الارقاموں کی تین قوت والی رقم مثبت علامت کی فرض کی جائیگی۔

مسئلہ :- اگر کثیر الارقام

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

میں لا کی بجائے $\frac{1}{n}$ یا اس سے بڑا عدد مندرج کیا جائے جہاں ک 'سرو' $\frac{1}{n}$ میں سے بلحاظ علامت سب سے بڑا سر ہے تو رقم $\frac{1}{n}$ باقی

سب رقموں کے مجموعہ سے بڑی ہوگی۔

نامساوات

$$1 - \frac{1}{n} < \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

(۵) پوری ہوگی لاکسی ایسی قیمت کے لئے جو نامساوات

$$1 - \frac{1}{n} < \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

کو پورا کرے جہاں $\frac{1}{n}$ ، $\frac{1}{n-1}$ ، $\frac{1}{n-2}$ ، $\frac{1}{n-1}$ میں سے بالاحوال علامت سب سے بڑا سر ہے۔ خطوط وحدانی کے اندر کے سلسلہ ہندسیہ کو جمع کرنے سے

$$1 - \frac{1}{n} < \frac{1}{n-1}$$

$$\text{یا } 1 - \frac{1}{n} < \frac{1}{(1 - \frac{1}{n})}$$

یہ نامساوات پوری ہوگی اگر

$$1 - \frac{1}{n} < 1$$

$$\text{یعنی } 1 - \frac{1}{n} < 1$$

یہاں جو مسئلہ ثابت کیا گیا ہے اس کی مدد سے اُس صورت میں جبکہ کثیرالارقام کے سر دئے ہوئے اعداد ہوں ہم ایک ایسا عدد معلوم کر سکتے ہیں کہ جب $\frac{1}{n} + \infty$ سے قریب تر قیمتیں دی جائیں تو کثیرالارقام کی علامت ہمیشہ مثبت رہے گی۔ اگر ہم لاکسی علامت بدل دیں تو کثیرالارقام کی پہلی رقم کی علامت باقی رہے گی یا منفی ہو جائے گی بموجب اس کے کہ $\frac{1}{n}$ جفت عدد ہو یا طاق۔ اس سے ظاہر ہے کہ مسئلہ بالا کی مدد سے ہم لاکسی ایک ایسی منفی قیمت بھی دریافت کر سکتے ہیں کہ ∞ سے قریب تر قیمتوں کے لئے کثیرالارقام کی علامت ہمیشہ مثبت ہوگی یا منفی بموجب اس کے کہ $\frac{1}{n}$ جفت ہو یا طاق۔ عام طور پر کثیرالارقام کی ترکیب ایسی ہوتی ہے کہ کم یا زیادہ سے زیادہ صحیح حدود جو صفر سے قریب ہوں دریافت کر سکتے ہیں جن کے باہر غافل

کی علامت ہمیشہ وہی رہیگی۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ مندرجہ بالا ثبوت میں ہم نے ناموافق ترین صورت لی ہے جس میں پہلے سر کے سوائے باقی تمام سر منفی اور $\frac{1}{n}$ کے مساوی ہیں حالانکہ عام طور پر سر مثبت، منفی یا صفر ہو سکتے ہیں۔ کسی آئینہ باب میں ہم وہ مسئلے کو بیان کریں گے جن کی مدد سے یہ زیادہ صحیح حدود دریافت کی جاسکتی ہیں۔

۵۔ اب ہم یہ دریافت کریں گے کہ اگر لاکھ قیمت غیر محدود طور پر گھٹائی جائے تو کثیر الارقام کی کونسی رقم سب سے زیادہ اہمیت رکھتی ہے۔ نیز ہم ایک ایسی مقدار دریافت کریں گے کہ لاکھ بجائے اسکو یا اس سے چھوٹی کسی قیمت کو درج کرنے سے مذکورہ بالا رقم باقی سب رقموں پر غالب ہو جائے۔

مسئلہ :- اگر کثیر الارقام

$$(7) \quad \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{n^k} + \dots$$

میں لاکھ بجائے $\frac{1}{n}$ یا اس سے چھوٹی قیمت مندرج کی جائے جہاں $\frac{1}{n}$ کو چھوڑ کر سب سے بڑا سر $\frac{1}{n}$ ہے تو رقم $\frac{1}{n}$ بلحاظ قیمت مطلق باقی تمام رقموں کے مجموعہ سے بڑی ہوگی۔

اس کو ثابت کرنے کے لئے فرض کر دو کہ $\frac{1}{n} = \frac{1}{m}$ تو دفعہ ۴ کے مسئلہ سے

چونکہ سروں $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}, \dots, \frac{1}{n^k}, \dots$ میں سے بلا لحاظ علامت سب سے بڑا سر $\frac{1}{n}$ ہے

ماکی قیمت $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots$ سے بڑی قیمت کے لئے

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{n^k} + \dots > \frac{1}{n}$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{n^k} + \dots > \frac{1}{n}$$

پس $\frac{1}{n}$ یا اس سے چھوٹی قیمت کے لئے

$$1^n + 2^n + 3^n + \dots + n^n$$

یہ مسئلہ دوسرے الفاظ میں اکثر اس طرح بیان کیا جاتا ہے:-
لا کی اتنی چھوٹی قیمتیں مقرر کی جاسکتی ہیں کہ ان کے اندراج سے کثیر الارقام

$$1^n + 2^n + 3^n + \dots + n^n$$

کسی مقررہ مقدار سے کم ہو۔

اس بیان کی تصدیق ثبوت بالا سے ظاہر ہے کیونکہ 1^n کو مقررہ مقدار خیال کیا جاسکتا ہے۔ ایک اور مفید شکل میں مسئلہ بالا اس طرح پیش کیا جاسکتا ہے:-
جب متغیر لا کو بہت چھوٹی قیمت دی جائے تو کثیر الارقام

$$1^n + 2^n + 3^n + \dots + n^n$$

کی علامت وہی ہوگی جو رقم اول 1^n کی ہے۔
یہ کثیر الارقام کو شکل

$$[1^n + 2^n + 3^n + \dots + n^n]$$

میں رکھنے سے بخوبی واضح ہے کیونکہ جب لا کو کافی چھوٹی قیمت دیا جاتی ہے تو رقم اول 1^n کی قیمت خطوط وحدانی کے اندر کی تمام دوسری رقموں کی مجموعی قیمت سے بڑی ہوتی ہے اور اس لئے جملہ کی علامت 1^n کی علامت پر منحصر ہوگی۔

۶۔ متغیر کو بڑھانے سے یا گھٹانے سے کثیر الارقام کی شکل میں تبدیلی۔ (8)

مشتق تفاعل۔

اب ہم اس شکل کا امتحان کریں گے جو کثیر الارقام اختیار کرتا ہے جبکہ لا کی بجائے h درج کیا جائے۔ اگر ہم کو لازماً مثبت فرض کریں تو کثیر الارقام کی جو شکل حال ہوگی وہ تغیر کے لحاظ سے وہی ہوگی اور اس میں اگر h کی علامت بدل دی جائے

تو کثیرالارقام کی جو شکل حاصل ہوگی وہ متغیر کو گھٹانے کے جواب میں ہوگی۔
جب لا بدل کر لا + ہ ہو جائے قوت (لا) بدل کر ف (لا + ہ) یعنی

$$! (لا + ہ)^ن + ! (لا + ہ)^{ن-1} + ! (لا + ہ)^{ن-2} + \dots + ! (لا + ہ)^1 + ! (لا + ہ)^0$$

ہو جائے گا۔

فرض کر دو کہ اس جگہ کی ہر رقم کو مسئلہ ثنائی کی مدد سے پھیلا یا گیا ہے اور پھر جبکہ کو
ہ کی صعودی قوتوں میں ترتیب دیا گیا ہے تو ہمیں حاصل ہوگا

$$! لا^ن + ! لا^{ن-1} + ! لا^{ن-2} + \dots + ! لا^1 + ! لا^0 +$$

$$+ ! [ن] لا^{ن-1} + ! [ن-1] لا^{ن-2} + ! [ن-2] لا^{ن-3} + \dots + ! [ن-1] لا^0 +$$

$$+ ! \left[\frac{2!}{2 \times 1} [ن] (ن-1) + ! لا^{ن-2} (ن-1) (ن-2) + \dots + ! [ن-2] \right] +$$

$$+ \dots + ! \left[\frac{ن!}{ن \times \dots \times 3 \times 2 \times 1} [ن] (ن-1) (ن-2) \dots (2-ن) (1-ن) \right] + !$$

یہ ظاہر ہے کہ جملہ بالا کا وہ حصہ جس میں ہ شامل نہیں ہے ف (لا) ہے اور یہ کہ ہ کی
مختلف قوتوں کے متواتر سر لا کے ایسے جملے ہیں جن کے درجے بقدر ایک کے
گھٹتے جاتے ہیں۔ نیز یہ بھی ظاہر ہے کہ ہ کا سر جملہ ف (لا) سے حاصل
ہو سکتا ہے اس صورت پر کہ ف (لا) کی ہر رقم کو اس کی قوت سے ضرب دیا جائے
اور اس رقم کی قوت کو بقدر ایک کے گھٹایا جائے اور رقم کی علامت برقرار رکھی
جائے۔ ف (لا) کی تمام رقموں کے ساتھ یہی عمل کیا جائے تو ان کا مجموعہ
ایسا کثیرالارقام ہوگا جس کا درجہ ف (لا) کے درجہ سے بقدر ایک کے گھٹا
ہوا ہوگا۔

اس کثیرالارقام کو ف (لا) کا پہلا مشتق کہتے ہیں۔ عام طور پر اس کو ف (لا)
سے تعبیر کرتے ہیں۔

(9) اب ف (لا) پر بالکل اسی طرح کا عمل کرنے سے $\frac{1}{2}!$ کا سر حاصل ہو سکتا ہے
جس طرح کہ ف (لا)، ف (لا) سے حاصل کیا گیا یا اس طرح کہ ف (لا) پر دوبار

یہ عمل کیا جائے۔ اس سر کو ف (لا) سے تعبیر کرتے ہیں اور اس کو ف (لا) کا دوسرا مشتق سمجھتے ہیں۔ بالکل اسی طرح کے طریق عمل سے یکے بعد دیگرے ہر کے دوسرے سروں کو حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اور اس لئے ترقیم مت ذکرہ بالا کو استعمال کرنے سے ہم نتیجہ بالا کو شکل ذیل میں ظاہر کر سکتے ہیں:-

$$ف (لا + ہ) = ف (لا) + ہ ف (لا) + \frac{۳ہ}{۳ \times ۲ \times ۱} ف (لا) + \dots + \frac{۱ہ}{۱}$$

یہ یاد رہے کہ چونکہ لا اور ہ کو آپس میں بدل دینے سے ف (لا + ہ) بدل نہیں جاتا، اس لئے اس کے پھیلاؤ کو شکل ذیل میں بھی رکھا جاسکتا ہے۔

$$ف (لا + ہ) = ف (ہ) + لا ف (ہ) + \frac{لا^۲}{۲ \times ۱} ف (ہ) + \dots + \frac{لا^۳}{۳ \times ۲ \times ۱} ف (ہ) + \dots$$

ہم بالعموم وہ ترقیم استعمال کریں گے جو یہاں سمجھائی گئی ہے۔ بعض اوقات مشتق تفاعیل ف (لا)، ف (لا) ف (لا)، ف (لا) ف (لا) ف (لا)، کو منظر سہولت ف (لا) ف (لا) ف (لا) ف (لا)، سے بھی تعبیر کیا جائیگا۔ مثلاً ایسی صورت میں ف (لا + ہ) کے پھیلاؤ کو حسب ذیل شکل میں بیان کیا جائیگا۔

$$ف (لا + ہ) = ف (ہ) + ہ ف (لا) + \frac{۳ہ^۲}{۳ \times ۲ \times ۱} ف (لا) + \dots + \frac{۳ہ^۳}{۳ \times ۲ \times ۱} ف (لا) + \dots + \frac{۳ہ^۴}{۳ \times ۲ \times ۱} ف (لا) + \dots$$

مثال

کثیرالارقام ۴ لا ۳ لا ۲ لا ۱ لا میں لاکر بجائے لا + ہ مندرج کریں تو نتیجہ معلوم کرو۔

یہاں

$$ف (لا) = ۴ لا + ۳ لا^۲ + ۲ لا^۳ + لا^۴$$

$$ف (لا) = ۱۲ لا + ۱۲ لا^۲ + ۴ لا^۳$$

$$ف (لا) = ۱۲ لا + ۱۲ لا^۲ + ۴ لا^۳$$

$$ف (لا) = ۲۴$$

اور اس لئے نتیجہ ہو گا $۲ لا + ۳ لا - ۴ لا + ۵ + ۶ (۱۲ لا + ۱۳ لا - ۴) + \frac{۲۲}{۳ \times ۲ \times ۱}$ ۔

۷۔ لا کے ایک منطق مکملہ تفاعل کا تسلسل :- اگر ایک منطق اور مکملہ تفاعل

ف (لا) میں لا کی قیمت لا انتہا چھوٹے اضافوں کے ساتھ ایک مقدار ۱ سے ایک دوسری بڑی مقدار ب تک بدلی جائے تو ہم ثابت کرینگے کہ ف (لا) کی قیمت بھی اس اثناء میں لا انتہا چھوٹے اضافوں کے ساتھ بدلتی جائے گی۔ یہ الفاظ دیگر ہم ثابت کریں گے کہ ف (لا) لا کے ساتھ مسلسل بدلتا ہے۔

فرض کرو کہ لا ۱ سے ۱+۵ ہو جاوے تو اس کے جواب میں ف (لا) کا اضافہ ہو گا

ف (۱+۵) - ف (۱)

اور یہ دفعہ ۶ کی رو سے

$$۵ ف (۱) + \frac{۲۵}{۲ \times ۱} ف (۱) + \dots + ۱ ف (۱)$$

کے مساوی ہے جس میں ف (۱) ف (۱) محدود مقدار میں ہیں۔ اب دفعہ ۵ کے سلسلے سے اس آخری جملہ کی قیمت کو ۵ کو کافی چھوٹا لینے سے کسی مقررہ مقدار سے کم بنایا جاسکتا ہے۔ پس ف (۱+۵) اور ف (۱) کا فرق اتنا چھوٹا بنایا جاسکتا ہے جتنا ہم چاہیں اور یہ فرق بالآخر ۵ کے ساتھ صفر ہو جائیگا۔ ۱ سے ب تک لا کے تغیر کی تمام منزلوں میں یہ بات درست رہتی ہے اور اس لئے ف (لا) کا تسلسل ثابت ہو جاتا ہے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ ہم نے یہاں یہ ثابت نہیں کیا ہے کہ ف (۱) سے ف (ب) تک ف (لا) مسلسل بڑھتا ہے۔ ف (لا) مسلسل بڑھ سکتا ہے یا مسلسل گھٹ سکتا ہے یا چند مقامات پر بڑھتا اور باقی مقامات پر گھٹ سکتا ہے لیکن ثبوت بالا سے ظاہر ہے کہ وہ ایک قیمت سے دوسری قیمت دفعتاً یا وقت واحد میں اختیار نہیں کر سکتا اور اس لئے جب لا ۱ سے ب تک

مسلل بڑھتا ہے تو ف (لا) کی تمام متناظر قیمتیں ف (۱) اور ف (ب) کے درمیان واقع ہونی چاہئیں۔ ف (لا) کی علامت سے یہ معلوم ہو سکتا کہ ف (لا) آیا بڑھ رہا ہے یا گھٹ رہا ہے۔ کیونکہ دفعہ ۵ سے یہ بات واضح ہے کہ ہر کانی چھوٹا ہو تو پورے اضافہ کی علامت رقم ف (۱) کی علامت پر منحصر ہونی ہے۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ جب ف (۱) مثبت ہو تو ف (لا) کے ساتھ ساتھ بڑھتا ہے اور ف (۱) منفی ہو تو ف (لا) کے بڑھنے سے گھٹتا ہے۔

۸۔ خارج قسمت اور باقی کی شکل جیکہ کسی کثیر الارقام کو ایک ثنائی جملہ سے تقسیم کیا جائے :- فرض کرو کہ کثیر الارقام

$$۱ \cdot لا + ۱ \cdot لا^۱ + ۱ \cdot لا^۲ + \dots + ۱ \cdot لا^{۱-۱} + ۱ \cdot لا^{۱}$$

کو لا-۵ سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت حاصل ہوتا ہے (۱۱)

$$ب \cdot لا^۱ + ۱ \cdot لا^۱ + ۱ \cdot لا^۲ + ۱ \cdot لا^۳ + \dots + ۱ \cdot لا^{۱-۱} + ۱ \cdot لا^{۱}$$

اس کو ق سے اور باقی کو م سے تعبیر کرو تو مسادات ذیل حاصل ہوگی

$$ف (لا) \equiv (لا-۵) ق + م$$

اس مسادات کے یہ معنی ہیں کہ اگر ق کو لا-۵ سے ضرب دیکر اس میں م جمع کیا جائے تو نتیجہ ف (لا) کے حاصل ہونا چاہئے اور اس کی ہر رقم ف (لا) کی متناظر رقم کے مماثل ہونی چاہئے اس قسم کی مساداتوں کو دوسری مساداتوں سے جو تہائیات نہیں ہوتیں ممتاز کرنے کے لئے مسادات کی معمولی علامت استعمال کرنے کی بجائے علامت بالا اختیار کرنا سہولت بخش ہوگا۔ تہائیکہ کی بائیں جانب کا جملہ ہے

$$ب \cdot لا^۱ + ۱ \cdot لا^۱ + ۱ \cdot لا^۲ + ۱ \cdot لا^۳ + \dots + ۱ \cdot لا^{۱-۱} + ۱ \cdot لا^{۱}$$

دونوں جانبوں کے لاکھ سروں کو مساوی رکھنے سے حسب ذیل مساواتیں حاصل

وضاحت ہو جائے گی۔

مثلاً

۱۔ خارج قسمت اور باقی معلوم کرو جبکہ ۳ لا۔ ۵ لا۔ ۱۰ لا۔ ۱۱ لا۔ ۶۱ کو لا۔ ۳ سے تقسیم کیا جائے۔ محسوب کرنے کا طریقہ حسب ترتیب ذیل ہو گا۔

$$\begin{array}{r} ۳ - ۵ - ۱۰ - ۱۱ - ۶۱ \\ ۹ - ۱۲ - ۶۶ - ۲۳۱ \end{array}$$

$$\hline ۴ - ۲۲ - ۷۷ - ۱۷۰$$

اس لئے خارج قسمت ۳ لا۔ ۴ لا۔ ۲۲ لا۔ ۷۷ اور باقی ۱۷۰ ہے۔
۲۔ خارج قسمت اور باقی معلوم کرو جبکہ ۵ لا۔ ۳ لا۔ ۱۱ لا۔ ۱۳ کو لا۔ ۱ سے تقسیم کیا جائے۔
جواب ق = لا۔ ۶ + لا۔ ۹

$$۱۱ = ۷$$

۳۔ ق اور ۷ معلوم کرو جبکہ لا۔ ۴ لا۔ ۷ لا۔ ۱۱ لا۔ ۱۳ کو لا۔ ۵ سے تقسیم کیا جائے۔
نوٹ۔ اگر کسی کثیر الارقام میں کوئی رقم غائب ہو تو ف (لا) کے سر لکھتے وقت اس رقم کے سر کے بجائے صفر لکھنا ہو گا مثلاً اس مثال میں پہلی سطر اس طرح لکھی جائے گی۔

$$۱ - ۴ - ۷ - ۱۱ - ۱۳$$

جواب ق = لا۔ ۱۲ + لا۔ ۲۰ + لا۔ ۲۸۹ = ۷ ۱۳۳۲
۴۔ ق اور ۷ معلوم کرو جبکہ لا۔ ۳ لا۔ ۱۵ لا۔ ۲ کو لا۔ ۲ سے تقسیم کیا جائے۔
جواب ق = لا۔ ۲ + لا۔ ۷ + لا۔ ۱۴ + لا۔ ۲۸ + لا۔ ۵۶

$$۱۱۲ + لا۔ ۲۰۹ + لا۔ ۴۱۸ = ۷ ۸۳۸$$

۵۔ ق اور ۷ معلوم کرو جبکہ لا۔ ۱۰ لا۔ ۱۱ لا۔ ۱۳ کو لا۔ ۴ سے تقسیم کیا جائے۔
جواب ق = لا۔ ۴ لا۔ ۱۶ + لا۔ ۶۳ + لا۔ ۲۴۲ = ۷ ۸۵۵

تفاعلوں کی جدول۔ اگر کسی کثیر الارقام کے سر دئے ہوئے اعداد ہوں تو دفعہ گزشتہ کی مدد سے ہم یہ آسانی لاکہ کسی قیمت کے جواب میں ف (لا) کی

قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔
کیونکہ مساوات

$$ف (لا) \equiv (لا - ۵) ق + سرا$$

18

پوری ہوئی چار سیئہ خواہ لا کی بجائے کوئی مقدار درج کی جائے کیونکہ اس کے طرفین
مثلاً مساوی ہیں۔

فرض کرو کہ لا = ۵ تو ف (۵) = سرا، کیونکہ لا = ۵۔ اور ق محدود ہے۔
پس ف (لا) میں لا کی بجائے ۵ درج کرنے سے ہم وہ باقی حاصل کرتے ہیں
جو ف (لا) کو لا = ۵ سے تقسیم کرنے پر ملتا ہے۔ اس باقی کو گذشتہ دفعہ کی مدد سے ہ آسانی
معلوم کیا جاسکتا ہے۔

مثلاً دفعہ ۸ کی مثال (۱) کے کثیر الارقام

$$۳ لا - ۵ لا + ۱۰ لا + ۱۱ لا - ۶۱$$

میں لا کی بجائے ۳ درج کرنے سے ۱۷۰ حاصل ہوتا ہے جو کثیر الارقام کو لا = ۳
سے تقسیم کرنے کی صورت میں باقی ہے۔ طالب علم عملی طور پر ۳ درج کر کے اسکی
تصدیق کر سکتا ہے۔

کثیر الارقام

$$لا + لا - ۱۰ لا + ۱۱۳$$

میں لا کی بجائے ۴ درج کرنے سے ۸۵۵ حاصل ہوتا ہے جیسا کہ دفعہ ۸ کی
مثال ۵ سے ظاہر ہے۔ ہم نے دفعہ ۷ میں یہ دیکھا ہے کہ جب لا = ۵ سے ۵۰
تک بڑھتی والی قیمتوں کا ایک مسلسل سلسلہ اختیار کرتا ہے تو اس سلسلہ کے جواب میں ف (لا)
بھی ایک مسلسل سلسلہ میں سے گزرتا ہے۔

اگر ہم کسی کثیر الارقام میں جس کے سرورے ہوئے اعداد میں لا کی بجائے یکے
بعد دیگرے اعداد کا ایک مسلسل درج کریں مثلاً سلسلہ

$$۵ - ۴ - ۳ - ۲ - ۱ - ۰ - ۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ \dots$$

کے اعداد اور ان کے جواب میں ف (لا) کی قیمتوں کو محسوب کریں تو اس عمل کو ہم
تفاعل کی جدول بنانے کا عمل کہہ سکتے ہیں۔

امثلہ

۱۔ لاکھ حسب ذیل قیمتوں

۴-۳-۲-۱-۰-۱-۲-۳-۴

کے متناظر جملہ ۲ لا + لا - ۶ کی قیمتیں معلوم کرو۔

لا کی قیمتیں | ۴- | ۳- | ۲- | ۱- | ۰- | ۱- | ۲- | ۳- | ۴- |
ف (لا) | ۳۰ | ۱۵ | ۲ | ۳- | ۶- | ۵- | ۰- | ۹- | ۲۲ |

۲۔ لاکھ انہی قیمتوں کے لئے جملہ ۱۰ لا + لا + لا + ۶ کی قیمتیں معلوم کرو۔

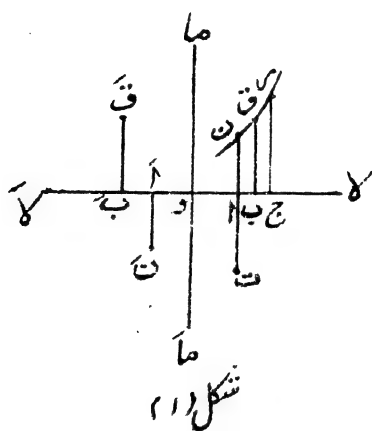
لا کی قیمتیں | ۴- | ۳- | ۲- | ۱- | ۰- | ۱- | ۲- | ۳- | ۴- |
ف (لا) | ۳۰ | ۱۵ | ۲ | ۳- | ۶- | ۵- | ۰- | ۹- | ۲۲ |

۱۰۔ کثیر الارقام کی تریسمی تعبیر۔ متغیر کی تبدیلیوں کے جواب میں کثیر الارقام

کی تبدیلیوں کی تحقیق کرنے کے لئے ظاہر ہے کہ ایک ایسا طریقہ جس سے کثیر الارقام کی مختلف قیمتوں کا مقابلہ ایک دوسرے سے آسانی ہو سکے بہت مفید ہوگا۔ اس کثیر الارقام کی صورت میں جس کے سر معلومہ اعداد ہوں لاکھ کسی مفروضہ قیمت کے جواب میں تفاعل کی ایک معین قیمت ہوگی۔

ہم تریسمی تعبیر کے ایک طریقہ کی توضیح کریں گے جس سے لاکھ مختلف قیمتوں کے جواب میں ف (لا) کی متناظر قیمتیں نظر کے سامنے آجاتی ہیں۔

فرض کرو کہ دو خطوط مستقیم و سلا اور و صا (شکل ۱۱) ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں اور دونوں سمتوں میں ان کو غیر محدود طور پر خارج کیا گیا ہے ان کو علی الترتیب محور سلا اور محور صا کہتے ہیں۔ و کے سیدھے طرف محور سلا پر و سے پیمائش شدہ فاصلے مثلاً و ا و ب وغیرہ مثبت سمجھے جاتے ہیں اور و کے بائیں جانب محور سلا پر و کے فاصلے مثلاً و ا و ب منفی۔ سلا کے اوپر و صا کے متوازی خطوط مثلاً ا ن یا ب ق مثبت اور اس کے نیچے مثلاً ا ت یا ر ن منفی سمجھے جاتے ہیں۔ طالب علم نے علم ثلث میں ان قواعد یاد دیے۔

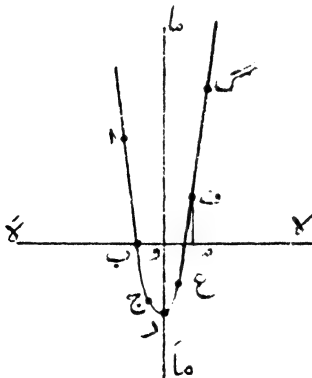


میں ف (لا) کی قیمتیں معلوم کی جائیں۔ لا کی قیمتوں کو فضلہ اور ف (لا کی تناسل) قیمتوں کو معین قرار دیکر نقطے مرسم کئے جائیں تب بالعموم یہ ممکن ہوگا کہ ہم ان نقطوں میں سے ایک ایسا منحنی کھینچ سکیں جو تفاعل کی قیمتوں پر روشنی ڈالے اور جس سے تفاعل کی نوعیت کا اندازہ ہو سکے۔ اس رسمیں تعبیر کی صحت بلاشبہ ان نقطوں کی تعداد ساتھ بڑھتی ہے جو متغیر کی کسی دوسری قیمتوں کے درمیان معلوم کئے گئے ہوں۔

جب کسی دو مجوزہ حدود کے اندر منحنی کے کسی حصہ کا احتیاط سے امتحان کرنا ہو تو ان کے درمیان متغیر کو ایسی قیمتیں دینا اکثر ضروری ہوگا جن میں سے کسی دو متصل قیمتوں کا فرق اکائی سے چھوٹا ہو۔ مثلاً ذیل سے ان اصولوں کی توضیح ہوگی۔

امثلہ

۱۔ لا + لا - ۶ کی رسم معلوم کرو۔
طول کی اکائی ۱۱ کا پل کی گئی ہے (شکل ۲)۔
۲۔ ۱۱ کی مثال (۱) میں - ۶ سے + ۶ تک بشمول ہر دو اعداد لاکے صحیح عددی قیمتوں کے جواب میں ف (لا) کی قیمتیں دی ہوئی ہیں۔



شکل (۲)

ان قیمتوں کی مدد سے منحنی پر کے نو نقطے معلوم ہو سکتے ہیں۔

جن میں سے سات 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ع'، 'ف'، 'گ' یہاں مرسم کئے گئے ہیں باقی دو نقطے اس شکل کے حدود سے باہر واقع ہیں۔

ج اور ع کے درمیان منحنی کو زیادہ صحت کے ساتھ مرسم کرنا غالب علم کے لئے ایک مفید مشق ہوگی۔ یہ اس طرح ہو سکتا ہے کہ

۱۔ اور ۱+ کے درمیان لاکی بہت سی قیمتوں مثلاً ان تمام قیمتوں کے جواب میں جن کا فرق $\frac{1}{2}$ ہے ف (لا) کی قیمتیں معلوم کی جائیں۔ ذیل کی مثال میں اس قسم کا عمل کیا گیا ہے۔

۲۔ کثیرالارقام

$$۱۰ \text{ لا} - ۱۰ \text{ لا}^۲ + ۱۰ \text{ لا} + ۶$$

کو مرتب کر دو۔

۳۔ اور ہم کے درمیان لاکی قیمتوں کے لئے اس تفاعل کی جدول دفعہ ۹ میں حاصل کر لی گئی ہے۔

دفعہ کی مشق کے طور پر یہ مشاہدہ کیا جاسکتا ہے کہ ۲۵ سے بڑھی لاکی تمام مثبت قیمتوں کے لئے یہ تفاعل ہمیشہ مثبت رہتا ہے اور ۲۵ سے چھوٹی ۰۰ تک لاکی تمام قیمتوں کے لئے تفاعل منفی قیمت رکھتا ہے۔ پس اگر مخفی محور لا کو قطع کرے گا تو ایسے نقطہ (یا نقطوں) پر قطع کرے گا جو ۲۵ اور ۲۵+ کے درمیان لاکی کسی قیمت (یا قیمتوں) کے جواب میں ہے۔ اس لئے اگر ہمارا مقصد صرف مساوات

ف (لا) = ۰ کی اصلوں کے مقامات

کا تعین کرنا یا ان کو تقریبی طور پر

معلوم کرنا ہو تو جدول کو صرف ۲۱۰

اور ۲۵ کے درمیانی وقفہ تک

محدود رکھا جاسکتا ہے۔

یہ ایسی صورت ہے جس میں

لاکی صرف صحیح عددی قیمتوں کے

اندراج سے مخفی کو مرتب کرنے میں

بہت کم مدد ملتی ہے۔ اور اس لئے

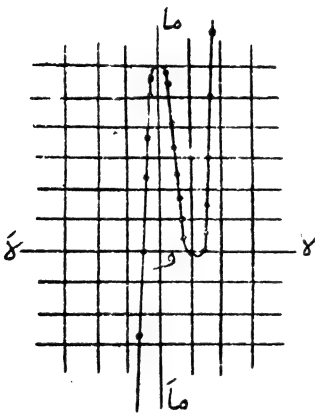
لا کو ایسی قیمتیں دینی ہوں گی جن میں

سے کسی دو متصل قیمتوں کا باہمی فرق بہت چھوٹا ہو۔ جدول ذیل میں ہم نے اعداد صحیح ۱۰،

اور ۱۰۰ اور ۲۱۱ کے درمیان $\frac{1}{2}$ کے وقفوں سے کام لیا ہے۔ ان قیمتوں سے مخفی

پر کے متناظر نقطے تقریبی طور پر حاصل کئے جاسکتے ہیں اور مخفی کو مرتب کیا جاسکتا ہے۔

دیکھو شکل (۳)



شکل (۳)

۱ -	۵۹ -	۵۸ -	۵۷ -	۵۶ -	۵۵ -	۵۴ -	۵۳ -	۵۲ -	۵۱ -
۲۲ -	۱۵۵۹۶ -	۱۰۶۸ -	۶۵۴۶ -	۲۵۸۸ -	۰	۲۵۲۳	۲۵۲۳	۲۵۲۳	۲۵۲۳

۵۳ -	۵۲ -	۵۱ -
۳۵۹	۵۵۰۴	۵۵۴۲

۱۰ -	۵۱ -	۵۲ -	۵۳ -	۵۴ -	۵۵ -	۵۶ -	۵۷ -	۵۸ -	۵۹ -
۶ -	۵۵۹۴ -	۵۵۶ -	۵۵۰۴ -	۳۵۳۳ -	۳۵۵ -	۲۵۶۴ -	۱۵۸ -	۱۵۰۴ -	۵۲ -

۱ -	۱۵۱ -	۱۵۲ -	۱۵۳ -	۱۵۴ -	۱۵۵ -	۱۵۶ -	۱۵۷ -	۱۵۸ -	۱۵۹ -
۰	۱۵۱۶ -	۰	۱۵۴۲ -	۳ -	۱۵۵ -	۵۵۰۴ -	۱۵۸ -	۱۵۰۴ -	۱۵۱۶ -

مثال (۱) میں مرسم شدہ منحنی محور لا کو دو نقطوں پر قطع کرتا ہے یعنی جن کی تعداد کثیر الارقام کے درجہ کے مساوی ہے (دوسرے الفاظ میں لا کی دو قیمتیں ایسی ہیں جن کے لئے دئے ہوئے کثیر الارقام کی قیمت صفر ہوتی ہے مساوات ۲ لا + لا - ۶ = ۰ کی اصلیں یہ قیمتیں ہونگی یعنی ۲ - اور ۱۵ - اسی طرح مثال (۳) میں مرسم شدہ منحنی محور لا کو تین نقطوں پر قطع کرتا ہے یعنی ان نقطوں پر جو کبھی مساوات ۱۰ لا - ۴ لا + لا + ۶ = ۰ کی اصلوں کے جواب میں ہیں۔ یہ ممکن ہے کہ دئے ہوئے کثیر الارقام کو تعبیر کر نیو لا منحنی محور لا کو قطع نہ کرے یا اتنے نقطوں پر قطع کرے جن کی تعداد کثیر الارقام کے درجہ سے کم ہو۔ ایسی صورتیں مساواتوں کی خیالی اصلوں سے متعلق ہوتی ہیں جن پر باب آئندہ میں تفصیلی بحث کی جائیگی مثلاً کثیر الارقام ۲ لا + لا + ۲ کو تعبیر کرے والا منحنی بالکلہ محور لا کے اوپر واقع ہوتا ہے ہم دیکھتے ہیں کہ اس تفاعل اور مثال (۱) کے تفاعل میں صرف مستقل کا فرق ہے اس لئے اس کی قیمت مثال (۱) کے تفاعل کی حاصل شدہ قیمت میں صرف ۸ جمع کرنے سے حاصل ہوتی ہے اور پورا منحنی مرسم شدہ منحنی کو محور لا کے استوا (۸) اکائیوں کے فاصلہ تک اوپر وار حرکت دینے سے حاصل ہو سکتا ہے۔ مساوات ۲ لا + لا + ۲ = ۰ کو حل کرنے سے یہ ظاہر ہے کہ منحنی لا کی وہ دو قیمتیں جو کثیر الارقام کو صفر بناتی ہیں اس صورت میں خیالی ہیں۔ منحنی محور لا کو جن نقطوں پر قطع کرتا ہے ان کی تعداد کثیر الارقام کے درجہ سے کم ہو تو ہم کہتے ہیں کہ منحنی محور لا کو

خیالی نقطوں پر قطع کرتا ہے۔

۱۱۔ کثیرالارقام کی اعظم اور اقل قیمتیں۔ دفعات مابین سے یہ بات

ظاہر ہے کہ جب متغیر لاء ∞ سے ∞ تک بدلتا ہے تو تفاعل ف (لا) میں بہت سے تغیرات واقع ہو سکتے ہیں۔ یہ ہو سکتا ہے کہ وہ کسی وقفہ میں بڑھتا جائے اور پھر بڑھنا چھوڑ دے اور گھٹنا شروع کرے۔ پھر گھٹنا چھوڑ دے اور مکرر بڑھنا شروع کرے جسکے بعد ممکن ہے کہ تفاعل کچھ وقفہ تک پھر گھٹنے لگے یا مسلسل بڑھتا جائے (جیسا کہ دفعہ مابین کی آخری مثال سے ظاہر ہے) اس نقطہ پر جہاں تفاعل بڑھنا چھوڑتا ہے اور گھٹنا شروع کرتا ہے ہم کہتے ہیں کہ تفاعل نے اعظم قیمت اختیار کی ہے اور جب تفاعل گھٹنا چھوڑتا ہے اور بڑھنا شروع کرتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ تفاعل نے اقل قیمت اختیار کی ہے تفاعل کی ایسی قیمتیں متعدد ہو سکتی ہیں۔ عام طور پر ان کی تعداد کثیرالارقام کے درجہ پر منحصر ہوگی۔ سوائے ترکیبی تغیر کے اور کوئی چیز تفاعل کی اعظم یا اقل قیمت کے وقوع کو اتنی وضاحت سے ظاہر نہیں کر سکتی۔ نیز ان تغیرات کو بھی جو تفاعل کی قیمتیں اختیار کرتی ہیں۔

18

دئے ہوئے کثیرالارقام کو مرتبہ کرتے وقت تفاعل کی اعظم اور اقل قیمتوں سے واقف ہونا سختی کو مرتبہ کرنے میں بڑی مدد دیتا ہے کیونکہ ان سے ان نقطوں کے محل حاصل ہو گئے ہیں جہاں سختی محور کے حوالہ سے طے پاتا ہے۔ کسی آئینہ باب میں ہم یہ بتائیں گے کہ ان نقطوں کا تعین ایسی مساوات کے حل پر منحصر ہوتا ہے جس کا درجہ دئے ہوئے تفاعل کے درجہ سے بقدر ایک کے کم ہو۔

یہ بتانا آسان ہے کہ اعظم اور اقل قیمتیں یکے بعد دیگرے وقوع پذیر ہوتی ہیں کیوں کہ ایک قیمت اعظم کے جواب میں تغیر کی ایک قیمت حاصل ہوگی اور دوسری قیمت اعظم کے جواب میں دوسری۔ جب متغیر اپنی پہلی قیمت سے دوسری قیمت تک بڑھتا ہے تو تفاعل گھٹنے سے ابتدا کرتا ہے اور بڑھنے پر ختم ہوتا ہے اور اس لئے ان دو اعظم قیمتوں کے درمیان کسی منزل پر ایک اقل قیمت اختیار کرتا ہے۔ اسی طرح یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ دو اقل قیمتوں کے درمیان ایک اعظم قیمت ہونی چاہیئے۔

دوسرا باب

مساواتوں کے عام خواص

۱۲۔ تفاعل (لا) کو مرتسم کرنے کا عمل جس کی تشریح دفعہ (۱۰) میں کی گئی ہے ایک دی ہوئی عددی مساوات کی حقیقی اصلوں کو تقریبی طور پر معلوم کرنے میں استعمال ہو سکتا ہے کیونکہ جب کسی تفاعل کے جواب میں معنی کو صحیح طور پر مرتسم کر لیا جاتا ہے تو مساوات (لا) = کی حقیقی اصلیں مبدا سے اُن نقطوں کے فاصلوں کو ناپنے سے تقریبی طور پر معلوم ہوتی ہیں جن پر معنی محور کو قطع کرتا ہے۔ اس مسئلہ کا عددی حل زیادہ صحیح طور پر معلوم کرنے اور نیز عددی اور جب سری دونوں قسم کی مساواتوں پر بحث کر نیے خیال سے اس باب میں ہم مساواتوں کی اہم ترین عام خاصیتوں کو اصلوں کی تعداد و ان کے وجود اور حقیقی و خیالی اصلوں کے درمیان فرق کے حوالہ سے ثابت کریں گے۔

مسئلہ ذیل کی مدد سے اکثر یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ کسی مساوات میں حقیقی اصل کا وجود ہے یا نہیں۔

مسئلہ۔ اگر کسی کثیرالدرجہ مساوات (لا) میں مجہول مقدار لا کی بجائے دو حقیقی مقداریں اور ب درج کیجائیں اور اگر ان اندراجات کے نتیجے مختلف علامت ہوں یعنی ایک منفی اور دوسرا مثبت تو مساوات (لا) = کی کم از کم ایک اصل حقیقی ہوگی جس کی قیمت اور ب کے درمیان واقع ہوگی۔

ہم نے دفعہ (۷) میں یہ ثابت کیا ہے کہ تفاعل (لا) کی ایک خاصیت

اس کا تسلسل ہے۔ مسئلہ بالا تفاعل کی اس خاصیت سے فوراً اخذ ہو سکتا ہے کیونکہ جب 'لا' سے 'ب' تک بدلتا ہے تو 'ف' (لا) بھی 'ف' (ا) سے 'ف' (ب) تک مسلسل بدلتا ہے اور اس لئے تمام درمیان قیمتوں کو یکے بعد دیگرے اختیار کرتا ہے۔ اب چونکہ 'ف' (ا) اور 'ف' (ب) میں سے ایک مقدار مثبت اور دوسری منفی ہے اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ 'ا' اور 'ب' کے درمیان 'لا' کی کسی خاص قیمت کے لئے جو 'ف' (لا) اور 'ف' (ب) کے درمیان واقع ہے 'ف' (لا) صفر قیمت اختیار کرتا ہے۔

20

تفاعل کی تریسیم معلوم کرنے سے طالب علم کو اس مسئلہ کے سمجھنے میں بہت مدد ملے گی یہاں جو بات ثابت کی گئی ہے اس پر جو شکل دیکھنے سے بالکل واضح ہو جائے گی وہ یہ ہے کہ اگر کثیر الارقام کو تعبیر کرنے والے منحنی کے دو نقطے محور 'لا' کی مخالف سمتوں میں ہوں یعنی ایک نقطہ محور 'لا' کے اوپر اور دوسرا اس کے نیچے تو ان نقطوں کو ملائے والا منحنی محور کو کم از کم ایک بار قطع کرے گا۔ شکل دیکھنے سے یہ بھی معلوم ہو گا کہ 'ا' اور 'ب' کے درمیان مختلف قیمتیں ہو سکتی ہیں جن کے لئے 'ف' (لا) = ۰ یعنی جن کے لئے منحنی محور کو قطع کرتا ہے مثلاً دفعہ (۱۰) شکل (۳) میں لا = ۲ سے تفاعل کی منفی قیمت (۱۴۴) اور لا = ۲ سے تفاعل کی مثبت قیمت (۲۰) حاصل ہوتی ہے اور ان نقطوں کے درمیان منحنی محور 'لا' کو تین جگہ قطع کرتا ہے۔

نتیجہ صریح۔ اگر کوئی ایسی حقیقی مقدار موجود نہ ہو جس کے اندراج سے 'ف' (لا) = ۰ ہو جائے تو 'لا' کی ہر حقیقی قیمت کے لئے 'ف' (لا) مثبت ہونا چاہیے۔

کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ (دفعہ ۴) لا = ۰ رکھنے سے 'ف' (لا) مثبت ہو جاتا ہے اور اس لئے 'لا' کی کوئی قیمت اس کو منفی نہیں بنا سکتی اس وجہ سے کہ اگر اس قسم کی کوئی قیمت ہو تو اس دفعہ کے مسئلہ سے مساوات کی ایک حقیقی اصل موجود ہونی چاہیے اور یہ ہمارے مفروضہ کے خلاف ہے۔ تریسیم طریقہ کے لحاظ سے اس مسئلہ کو یوں بیان کیا جاسکتا ہے:۔ جب مساوات 'ف' (لا) = ۰ کی کوئی اصل حقیقی نہ ہو تو 'ف' (لا) کو تعبیر کرنے والا منحنی بالکلیہ محور 'لا' کے

اد پر واقع ہوگا۔

۳۱۔ مسئلہ۔ طاق درجے کی ہر مساوات میں کم از کم ایک حقیقی اصل ایسی ہوتی ہے جسکی علامت مساوات کی آخری رقم کی علامت سے مختلف ہوگی۔

دفعہ ۱۰ سبق کے مسئلہ سے یہ نتیجہ فوراً اخذ ہوتا ہے۔ کثیر الازقام ف (لا) میں لائی بجائے علی الترتیب - $\infty, 0, 0, \infty$ مندرجہ کرو تو ن کے طاق ہونے کی وجہ سے (دیکھو دفعہ ۴) نتیجہ ہونگے

$$لا = \infty \text{ کے لئے } ف (لا) \text{ منفی}$$

$$لا = 0 \text{ کے لئے } ف (لا) \text{ کی علامت وہی جو } لائی کی ہے$$

$$لا = + \infty \text{ کے لئے } ف (لا) \text{ مثبت}$$

اگر لائی مثبت ہو تو - ∞ اور ۰ کے درمیان مساوات کی ایک حقیقی منفی اصل ہونی چاہیئے۔

اور اگر لائی منفی ہو تو صفر اور ∞ کے درمیان مساوات کی ایک حقیقی مثبت اصل ہونی چاہیئے۔ اس طرح مسئلہ بالاثبات ہو گیا۔

۳۲۔ مسئلہ۔ جنت درجے کی ہر مساوات میں جسکی آخری رقم منفی ہو کم از کم دو حقیقی اصلیں ہوتی ہیں ایک مثبت اور دوسری منفی۔

اس صورت میں - $\infty, 0, 0, \infty$ کے اندراج سے یہ نتیجہ ہونگے

$$لا کی قیمت \quad ف (لا) کی علامت$$

$$- \infty \quad +$$

$$0 \quad -$$

$$+ \infty \quad +$$

پس - ∞ اور صفر کے درمیان ایک حقیقی اصل اور صفر اور ∞ کے درمیان دوسری حقیقی اصل موجود ہونی چاہیئے یعنی کم از کم ایک حقیقی منفی اصل اور ایک حقیقی مثبت اصل موجود ہونی چاہیئے۔

اس دفعہ اور دفعہ ۱۰ سبق دونوں میں ہم نے صرف اصولوں کا وجود ثابت کرنے پر اکتفا کی ہے اور اس مقصد کے لئے لائی بجائے بہت بڑی مثبت یا منفی قیمتیں

درج کرنا کافی ہے جیسا کہ ہم نے کیا ہے۔ لیکن دفعہ ۴ کے مسئلہ کی مدد سے ان حدود کو تنگ کرنا فی الواقع ممکن ہے جن کے اندر مساوات کی اصلیں واقع ہوتی ہیں کسی آئندہ باب میں اصولوں کے حدود سے متعلق ایسے مسئلے دئے جائیں گے جن کی مدد سے متذکرہ حدود کو اور زیادہ تنگ کرنا ممکن ہو جائے گا۔

۱۵۔ عام مساوات میں ایک اصل کی موجودگی۔ خیالی اصلیں۔

ہم یہ ثابت کر چکے ہیں کہ ہر مساوات کی ایک حقیقی اصل ہوتی ہے سوائے
اس صورت کے جبکہ مساوات جنت درجہ کی ہو جس کی آخری رقم مثبت ہو۔
ایسی مساوات کے لئے یہ ممکن ہے کہ اس کی کوئی حقیقی اصل موجود نہ ہو۔ ایسی
صورت میں یہ امتحان کرنا ضروری ہے کہ آیا کوئی ایسی قیمتیں موجود ہیں جن میں خالی
اکائی ۱-۲ شامل ہے اور جن کو لاکھ بجائے درجہ کرنے سے کثیر الارقام صفر کے
مساوی ہو جاتا ہے۔ یا یہ کہ بعض صورتوں میں متغیر کی حقیقی اور خیالی دونوں قیمتیں
ہیں جو مساوات کو پورا کر لیں۔ ہم ایک سادہ مثال لیتے ہیں جس سے اس بات
کی توضیح ہو جائے گی کہ مساواتوں کی خیالی اصلیں بھی ہو سکتی ہیں۔ جیسا کہ ہم پہلے
بیان کر چکے ہیں (صفحہ ۱۰) کثیر الارقام

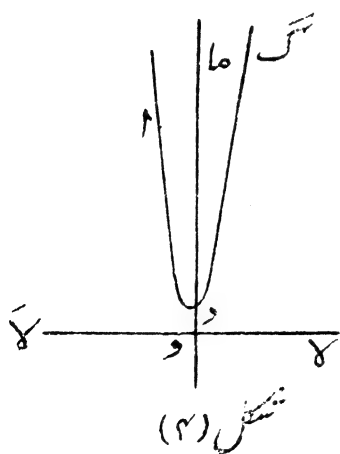
$$2 + 1 + 2 = (1)$$

کے جواب میں جو سختی ملتا ہے وہ کلامِ خوراک کے ادب پر واقع ہوتا ہے (دیکھو شکل (۴)۔

کوئی حقیقی اصل نہیں ہے لیکن اس کی
دو خیالی اصلیں

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2} = 1$$

موجود ہیں جو مساوات درجہ دوم



کو حل کرنے سے ظاہر ہے۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ حقیقی قیمتوں کی عدم موجودگی میں بصورت موجودہ دو خیالی سبلے ایسے ہیں جو کثیر الارقام کو صفر کے مساوی بنا دیتے ہیں۔

چنانچہ عام مسئلہ یہ ہے کہ ہر منطق مکملہ مساوات میں ایک اصل شکل

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$$

کی ہوتی ہے جہاں عد اور بہ حقیقی محدود مقدار میں ہیں۔ اس بیان میں حقیقی اور خیالی دونوں اصلیں شامل ہیں کیونکہ بہ = سے حقیقی اصل یعنی جب عد اور بہ عدد ہوں تو جملہ عد + بہ = ۱ کو ملتف عدد کہتے ہیں۔ جو کچھ ہم نے دعویٰ کیا ہے وہ یہ ہے کہ ہر عددی مساوات میں ایک حقیقی یا ملتف اصل ہوتی ہے۔ چونکہ اس مسئلہ کے ثبوت میں ایسے اصولوں سے واسطہ پڑے گا جن کو یہاں بیان کرنا خالی از دقت نہیں ہے اور جو اپنے اپنے وقت پر اس کتاب کے مختلف حصوں میں بیان ہونگے اس لئے ہم ان اصولوں کے ثابت ہونے تک اس مسئلہ کے ثبوت کو ملتوی کرتے ہیں۔ فی الحال ہم مسئلہ بالاکو تسلیم کئے لیتے ہیں اور اور اس سے چند نتیجے اخذ کرتے ہیں۔

۱۶۔ مسئلہ۔ ن درجے کی ہر مساوات کی ن اصلیں ہونگی اور اس سے زیادہ نہیں۔

ہم دیکھتے ہیں کہ اگر مساوات (۱۱) = کی ایک اصل کوئی مقدار ہے
 ہو تو ف (۱۱)، (۱۱-۵) سے پورا پورا تقسیم ہو جائے گا۔ یہ بات دفعہ ۹ سے ظاہر
 ہے کیونکہ اگر ف (۱۱) = یعنی اگر ف (۱۱) = کی اصل ہے ہو تو مسا کو صفر کے
 مساوی ہونا چاہیے۔

اب فرض کرو کہ دی ہوئی مساوات ہے

$$f(n) \equiv 1 + b^1 + b^2 + \dots + b^{n-1} + b^n = .$$

اس مساوات کی ایک حقیقی یا خیالی اصل ہونی چاہیئے (دفعہ ۱۵) جسکو ہم علامت ϵ سے تعبیر کریں گے۔ فرض کرو کہ f (لا کو لا) ϵ سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت

ف (۱) حاصل ہوتا ہے۔ تو ہمیں مساوات متماثلہ ملیگی

$$ف (۱) = (۱ - عم) ف (۱)$$

پھر مساوات ف (۱) = (۱ - عم) درجہ کی ایک مساوات ہے، اس کی بھی ایک اصل ہونی چاہیے جسکو ہم عم سے تعبیر کریں گے۔

فرض کرو کہ ف (۱) کو لا - عم سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت ف (۱) ہے۔

تو

$$ف (۱) = (۱ - عم) ف (۱)$$

$$اور \quad ف (۱) = (۱ - عم) (۱ - عم) ف (۱)$$

جہاں ف (۱) = ۱ - ۲ درجہ کا جملہ ہے۔

اس عمل کو جاری رکھ کر ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ ف (۱) = ۱ - ۲ درجہ کا جملہ ہے اور ایک عددی جزو ضربی ف (۱) کا حاصل ضرب ہے قبل الذکر اجزائے ضربی میں سے ہر ایک میں لا کی صورت پہلی قوت ہی داخل ہوتی ہے۔ اب لا کے سروں کا مقابلہ کرنے سے یہ ظاہر ہے کہ ف (۱) = ۱ - ۱ اس لئے مساوات متماثلہ

$$ف (۱) = (۱ - عم) (۱ - عم) (۱ - عم) \dots (۱ - عم) (۱ - عم) (۱ - عم)$$

حاصل ہوتی ہے۔

اب یہ ظاہر ہے کہ اس مساوات کے بائیں جانبی رکن میں لا کی بجائے

مقداروں عم، عم، عم، عم میں سے کوئی ایک درج کی جائے تہذیر رکن

صفر کے مساوی ہوتا ہے اور اس لئے ف (۱) بھی صفر کے مساوی ہوگا۔ یعنی

مساوات ف (۱) = ۰ کی اصلیں یہ مقداریں عم، عم، عم، عم ہیں۔

ان اصلوں کے علاوہ کوئی اور اصلیں نہیں ہو سکتیں کیونکہ عم، عم، عم، عم کے علاوہ کوئی اور مقدار مساوات یا لا کے بائیں جانبی رکن میں لا کی بجائے درج کی جائے

تو اس رکن کا کوئی جزو ضربی صفر نہیں ہوتا اور اس لئے حاصل ضرب صفر کے مساوی

نہیں ہو سکتا۔

نتیجہ صریح۔ لائیں n دیں درجہ کے دو کثیرالارتقام لاکھ n قیمتوں سے زیادہ کے لئے ایک دوسرے کے مساوی نہیں ہو سکتے سوائے اس صورت کہ جب دونوں متاناً مساوی ہوں۔ کیونکہ اگر ان کے فرق کو صفر کے مساوی رکھا جائے تو ہمیں n دین درجہ کی مساوات ملے گی جو صرف لاکھ n قیمتوں سے پوری ہو سکتی ہے سوائے اس صورت کے جبکہ ہر سر علیحدہ علیحدہ صفر کے مساوی ہو۔

اگرچہ کہ اس دفعہ کے مسئلہ سے مساوات (λ) = کو حل کرنے میں کوئی مدد نہیں ملتی لیکن اس کی مدد سے اس کے عکس کو ہم پوری طرح حل کر سکتے ہیں یعنی جب مساوات کی اصلیں دی گئی ہوں تو مساوات معلوم ہو سکتی ہے۔ دی ہوئی اصلوں میں سے ہر ایک کو لائیں سے تفریق کرو۔ تو جتنی اصلیں ہیں اتنے ثنائی جملے حاصل ہونگے۔ ان ثنائی جملوں کو باہم ضرب دو تو مطلوبہ مساوات حاصل ہو جائے گی۔ اس مسئلہ کا ایک اور قاعدہ یہ ہے کہ جب دی ہوئی مساوات کی ایک یا ایک سے زیادہ اصلیں دی گئی ہوں تو ایسی مساوات معلوم ہو سکتی ہے جسکی اصلیں باقی نامعلوم اصلیں ہوں۔ اس غرض کے لئے ہمیں صرف یہ کرنا ہوگا کہ دئے ہوئے ثنائی اجزائے ضربی کے حاصل ضرب سے دی ہوئی مساوات کو تقسیم کر دیا جائے، خارج قسمت مطلوبہ کثیرالارتقام ہوگا جو باقی اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہوگا۔

امثلہ

۱۔ وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں ہیں

$$x^3 - 13x^2 + 54x - 40 = 0$$

جواب :- $x^3 - 13x^2 + 54x - 40 = 0$

۲۔ مساوات

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

کی ایک اصل ۵ ہے۔ وہ مساوات معلوم کرو جس کی اصلیں باقی نامعلوم اصلیں ہوں۔
دفعہ ۸ کا تقسیم کا طریقہ استعمال کرو۔

جواب :- لا - لا + لا - لا = ۰

۳ — مساوات

لا - لا + لا + لا - لا = ۱۰۵

کی دو اصلیں ۱ اور ۷ ہیں۔ اس مساوات کو حل کرو۔

جواب :- باقی دو اصلیں ۳، ۵ ہیں۔

۴ — ایک مساوات کی اصلیں

۱/۲ ، ۳ ، ۴

ہیں۔ اس مساوات کو معلوم کرو۔

جواب :- لا - لا + لا - لا = ۹

۵ — کبھی مساوات

لا - لا = ۱

کو حل کرو۔

یہاں یہ ظاہر ہے کہ لا = ۱، مساوات کو پورا کرتا ہے۔ لا - لا سے تقسیم کر کے خارج

کو حل کرو تو باقی دو اصلیں ہونگی

۱/۲ + ۱/۳ - لا - لا = ۱

۶ — ایک مساوات کی ایک غیر منطقی اصل ہے

لا + لا

ہے۔ اس مساوات کو معلوم کرو اس طرح کہ اس کے سر منطقی ہوں۔

جذری علامتوں کے مختلف اجتماعوں کی بوجہ اس جملہ کی چار مختلف قیمتیں ہونگی یعنی

لا + لا ، لا - لا ، لا + لا ، لا - لا

اس لئے مطلوبہ مساوات ہے

(لا - لا) (لا + لا) (لا - لا) (لا + لا) = ۰

(لا - لا) (لا + لا) (لا - لا) (لا + لا) = ۰

یا بالآخر

لا - لا = ۰

۷۔ مساوی اصلیں۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ کثیر الارقام ف (لا) کے ن اجزائے ضربی میں سے سب کا ایک دوسرے سے مختلف ہونا ضروری نہیں ہے مثلاً جزو ضربی لا۔ عد کی دوسری قوت یا اس سے بڑی قوت بشرطیکہ یہ ن سے متجاہوز نہ ہو داخل ہو سکتی ہے۔ ایسی صورت میں بھی ہم یہ کہتے ہیں کہ مساوات ف (لا) =۔ کی ن اصلیں ہیں جن میں سے دو یا زیادہ ایک دوسرے کے مساوی ہیں۔ اصل نہ کہ مساوات کی ضغفی اصل کہتے ہیں یعنی وہ ہری تہری وغیرہ بموجب اس تعداد کے جتنے بار جزو ضربی تکرار پاتا ہے۔

دفعہ (۱۰) شکل (۳) کی ترسیم دیکھنے سے ضغفی اصولوں کا واقع ہونا سمجھ میں آجائے گا اس شکل کا معاملہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات ۱۰۔ لا + لا + لا + لا + لا =۔ کی دو مثبت اصلیں تقریباً مساوی ہیں اور ہم یہ تصور کر سکتے ہیں کہ اس کثیر الارقام کی مطلق رقم میں ایک چھوٹا عدد جمع کیا گیا ہے جس کے معنی یہ ہیں کہ پورے منحنی کو چھوٹے فاصلہ میں اوپر وار متوازی حرکت دی گئی ہے تو اس کا اثر یہ ہوگا کہ اصلیں جو ابتدا میں تقریباً مساوی تھیں اب بالکل مساوی ہو جائیں گی۔ ایسی صورت میں خط ولا منحنی کو دو متماثل نقطوں پر قطع نہیں کرے گا بلکہ اُس کو مس کرے گا۔ جب کوئی خط منحنی کو مس کرتا ہے تو یہ کہنا مناسب ہے کہ خط منحنی کو ایک نقطہ پر نہیں بلکہ دو منطبق نقطوں پر ملتا ہے۔ وہ طالب علم جو مستوی منحنیوں کے نظریہ سے واقف ہے بلا تکلف اسی طرح تہری یا اس سے زیادہ ضغفی اصل کے واقع ہونے کی تشریح مثالوں سے کر سکتا ہے۔

مساوی اصلیں، حقیقی اور خیالی اصولوں کے درمیان ملانے والی کڑی کا کام کرتی ہیں۔

ہم نے ابھی دیکھا ہے کہ دو حقیقی اصلیں رکھنے والا کثیر الارقام ذرا سی تبدیلی سے ایسی شکل میں بدلتا ہے جس میں دو حقیقی اصلیں مساوی ہو جاتی ہیں۔ اگر اور ذرا سی تبدیلی کر دی جائے تو ہم کثیر الارقام کو ایسی شکل میں بدل سکتے ہیں جس میں یہ دو اصلیں خیالی ہو جائیں۔

فرض کرو کہ اس کثیر الارقام کی مطلق رقم میں ایک اور چھوٹا عدد اضافہ کرنے سے اس کو کم کر بدلیا گیا ہے تو ہمیں اس کی ایسی ترتیم ملے گی جس میں محور ولا منحنی کو صرف ایک حقیقی نقطہ پر قطع کرے گا یعنی اس نقطہ پر جو منفی اصل کے جواب میں ہے۔ وہ دو نقطے جو مثبت اصولوں کے جواب میں تھے اب غائب ہو جائیں گے۔

مثلاً کثیر الارقام $10x^3 - 14x^2 + 28x + 28$ پر غور کرو جو دفعہ ۱۰ مثال (۱۲) کے کثیر الارقام میں ۲۲ جمع کرنے سے حاصل کیا گیا ہے ابکی ترتیم کو یہ آسانی کھینچا جاسکتا ہے شکل ۳ کے نقطہ کے جواب میں اب ایک ایسا نقطہ حاصل ہوگا جو محور لا کے بہت اوپر واقع ہوگا۔ $10x^3 - 14x^2 + 28x + 28$ سے تقسیم کرو اور - رتسمی جملہ Trinomial) تین رقموں والا جملہ $10x^3 - 14x^2 + 28x + 28$ حاصل کرو جس میں بقیہ دو اصلیں موجود ہوں گی۔ یہ دو ہمیں آسانی سے معلوم ہو سکتی ہیں اور وہ ہیں

$$\frac{391\sqrt{13}}{2} - \frac{24}{13}, \quad \frac{391\sqrt{13}}{2} + \frac{24}{13}$$

ہم یہاں دیکھتے ہیں کہ جب کثیر الارقام کی شکل بدلی جاتی ہے اس غرض سے کہ ایک اصل غائب ہو جائے تو اس کے ساتھ ایک دوسری اصل بھی غائب ہو جاتی ہے اور ان کی جگہ خمیالی اصولوں کا ایک زوج لیتا ہے۔ اس کا سبب آئندہ دفعہ کے مسئلہ سے واضح ہوگا۔

۱۸۔ مساداتوں میں خمیالی اصلیں زوج زوج داخل ہوتی ہیں۔

مسئلہ ثابت شدنی کو اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے

اگر مسادات $f(x)$ کی ایک اصل $(x - a)$ خیالی جملہ $+ b$ ہے اور مسادات کے تمام حقیقی مقداہیں ہوں تو اس کی ایک اور اصل مزدوج خیالی جملہ $- b$ ہے اور بھی ہونی چاہیئے۔

مسادات ذیل متاثر ہے

$$(x - a - b)(x - a + b)$$

$$= (x - a)^2 - b^2$$

فرض کرو کہ کثیر رقمی f (لا) کو اس متانہ کے بائیں رکن سے تقسیم کیا گیا ہے اور اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ باقی $س + لا + س$ ہے تو مساوات متانہ لے لی

$$f(لا) \equiv (لا - ع)^2 + ع^2 + ق + س + لا + س$$

جہاں $ق$ ، $(ن - ۲)$ درجی خارج قسمت ہے۔ اس مساوات متانہ میں لا کی بجائے $ع + ع + ع - ۱$ درج کرو تو بموجب فرض $f(لا)$ صفر ہوگا لیکن اس سے $(لا - ع)^2 + ع^2 + ع$ بھی صفر ہوتا ہے۔ اسلئے

$$س + (ع + ع - ۱) + س = ۰$$

جس سے ہیں دو مساواتیں

$$س + ع + س = ۰، س + ع = ۰$$

ملتی ہیں کیونکہ حقیقی و خیالی حصے ایک دوسرے کو صفر نہیں بنا سکتے اور اس لئے ان کو علیحدہ علیحدہ مساوی ہونا چاہیئے۔ پس

$$س = ۰، س = ۰$$

اس طرح باقی $س + لا + س$ صفر ہو جاتا ہے اور اس لئے $f(لا)$ دو

اجزائے ضربی

$$لا - ع، ع - ۱، لا - ع + ع + ع - ۱$$

کے حاصل ضرب سے پورا پورا تقسیم ہوتا ہے جس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اصل $ع + ع + ع - ۱$ کے ساتھ $ع - ۱$ کو بھی اصل ہونا چاہیئے۔

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ حقیقی سرور والی کسی مساوات میں خیالی اصلوں کی تعداد ہمیشہ جفت ہوتی ہے اور ہر کثیر رقمی کو حقیقی اجزائے ضربی سے ترکیب یافتہ خیال کیا جاسکتا ہے جس میں خیالی اصلوں کے ہر زوج سے ایک حقیقی دو درجی جزو ضربی اور ہر حقیقی اصل سے ایک مفرد حقیقی جزو ضربی پیدا ہوتا ہے۔ کثیر رقمی کو ایسے اجزائے ضربی میں عملاً تجزیل کر دینا مساوات کو پوری طرح حل کرنا ہے۔

ہم نے دفعہ ۱۱ میں یہ بیان کیا تھا کہ مساوی اصلوں کو حقیقی اور خیالی

اصولوں کے درمیان ملائیوالی کرکشی خیال کیا جاسکتا ہے اس بیان کو اب دوسرے نقطہ نظر سے دیکھا جاسکتا ہے۔ فرض کرو کہ کثیر رتسی کا ایک دو درجی جزو ضربی (لا۔ عہ) $2x^2 + 3x - 1$ ہے اور فرض کرو کہ ک کی قیمت میں چھوٹی تبدیلیوں کے ذریعہ کثیر رتسی کی شکل تبدیل کی گئی ہے۔ جب ک منفی ہوتا ہے تو اس دو درجی جزو ضربی کو حقیقی اصولوں کا ایک زوج حاصل ہوتا ہے۔ جب ک = ۰ تو اس جزو ضربی سے دو مساوی اصلیں عہ حاصل ہوتی ہیں اور جب ک مثبت ہو تو دو خیالی اصلیں ملتی ہیں۔

بالکل ایسے ہی ثبوت سے جیسے اوپر دیا گیا ہے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ شکل $2x^2 + 3x - 1$ کی اہم اصلیں مساواتوں میں زوج زوج داخل ہوتی ہیں جبکہ مساواتوں کے منطبق ہوں۔

مثالیں

۱۔ دو منطبق کبھی مساوات بناؤ جس کی اصلیں ہیں

$$x^2 - 7x + 3 = 0$$

جواب: لا۔ عہ $2x^2 - 19x + 13 = 0$

۲۔ دو منطبق مساوات بناؤ جس کی دو اصلیں ہیں

$$x^2 - 5x + 1 = 0$$

جواب: لا۔ عہ $2x^2 - 12x + 13 = 0$

۳۔ مساوات

$$x^2 + 2x - 5 = 0$$

کی ایک اصل

$$x^2 + 2x - 5 = 0$$

ہم دوسری اصلیں معلوم کرو۔ جواب: لا۔ عہ $2x^2 + 4x - 11 = 0$

۴۔ مساوات

$$x^2 - 3x + 11 = 0$$

کی ایک اصل $2 + 7 = 9$ ہے۔ اس مساوات کو حل کرو۔

جواب: $2 \pm 7 = 9$ ۔

۱۹۔ ڈیکارٹ کا قانون علامت۔ مثبت اصلیں۔ اس قانون

کو استعمال کر کے کسی دی ہوئی مساوات کا صرف معائنہ کرنے سے ہم اس کی مثبت اصلوں کی تعداد کے لئے ایک علوی حد مقرر کر سکتے ہیں۔ اس قانون کو حسب ذیل طریقہ پر بیان کیا جاسکتا ہے۔

مساوات کی سب رٹموں کو دائیں جانب منتقل کر کے بائیں جانب صفر رکھا جائے تو اس کے پہلے رکن کی رٹموں میں + سے - اور - سے + علامات کی جتنی تبدیلیاں ہونگی ان سے زیادہ مساوات کی مثبت اصلیں نہیں ہو سکتیں۔

ہم فی الحال صرف ایسے ثبوت پر اکتفا کریں گے جو عموماً دیا جاتا ہے۔ یہ ثبوت ڈیکارٹ کے اس مشہور مسئلہ کا عام ثبوت نہیں کہلایا جاسکتا بلکہ اس کو اس مسئلہ کی صرف تصدیق کہنا زیادہ بہتر ہوگا۔ آئندہ ہم یہ دکھائیں گے کہ متذکرہ بالا قانون اور دیگر مشابہ قوانین جو متقدمین نے مساواتوں کی مثبت، منفی اور خیالی اصلوں کی تعداد سے متعلق دریافت کیں ہیں دراصل بون (Budan) اور فوریر (Fourier) کے عام مسئلوں سے فوریر تئجوں کے طور پر اخذ ہوئے ہیں۔

فرض کرو کہ کسی کثیر رٹمی کی علامتیں یکے بعد دیگرے ترتیب ذیل میں پیش ہوتی ہیں

+ - + + - - - + - + +

اس میں علامت کی تبدیلیاں کل سات ہیں جس میں + سے - اور - سے + دونوں قسم کی تبدیلیاں شامل ہیں۔ یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ اگر اس کثیر رٹمی کو ایک ثنائی جڑ سے ضرب دیا جائے جس کی علامتیں ایک مثبت اصل کے جواب میں ہیں۔ ہیں تو حاصل کثیر رٹمی میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد ابستدائی کثیر رٹمی کے بہ نسبت کم از کم بقدر ایک کے زیادہ ہوگی۔

ہم صرف علامتوں کو لکھتے ہیں جو عمل ضرب میں واقع ہوتی ہیں۔ اس طرح

- + - + + - - - + - + +

+ - + - - + + + - + - -

+ - + - + + 7 7 - + - + +

یہاں تیسری سطر میں جہاں کہیں دو مختلف علامت رقوموں کو جمع کرنا ہے وہاں مبہم علامت رکھی گئی ہے۔ اس صورت میں ہم دیکھتے ہیں (اور کسی دوسری ترتیب میں بھی یہی بات پیدا ہوگی) کہ عمل ضرب کا اثر یہ ہوتا ہے کہ مبہم علامت ایسی جگہ داخل ہوتی ہے جہاں ابتدائی کثیر رقی میں + کے بعد + یا - کے بعد - علامت آتی ہے۔ علامت کی تبدیلیوں کی تعداد ہرگز نہیں ٹھکتی۔ لیکن ہمیشہ ایک تبدیلی آخر میں ضرور پیدا ہوتی ہے۔ اوپر کی مثال میں جہاں ابتدائی کثیر رقی علامت کی ایک تبدیلی پر ختم ہوتا ہے یہ نتیجہ ظاہر ہے۔ اگر کثیر رقی ایک ہی علامت کی تکرار پر ختم ہو تو بھی یہ معلوم ہوگا کہ حاصل کثیر رقی میں اس کے متناظر ابہام سے علامت کی ایک تبدیلی کا اضافہ ہوگا۔ یہ تبدیلی کچھلی علامت کے ساتھ ہوگی یا جمع شدہ زائد علامت کے ساتھ۔ پس ایسی نادرا و ندر صورت میں بھی جس میں ابتدائی کثیر رقی میں علامت کی تکراروں سے حاصل کثیر رقی میں علامت کی تکراریں باقی رہتی ہیں ایک تبدیلی جمع ہوتی ہے۔ پس ہم اس لیے یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ کثیر رقی کو ثنائی جملہ لا - ع سے ضرب دیا جائے تو کم از کم علامت کی ایک زائد تبدیلی داخل ہوتی ہے۔

اب فرض کرو کہ کثیر رقی ایسے اجزائے ضربی کے حاصل ضرب سے بنا ہے جو منفی اور خیالی اصلوں کے جواب میں ہیں مثبت اصلوں ع، ہ، ج وغیرہ کے متناظر اجزائے ضربی لا - ع، کلا - ہ، لا - ج، وغیرہ میں سے ہر ایک سے اس کثیر رقی کو ضرب دینے کا اثر یہ ہوگا کہ ہر ایک جزو ضربی کے جواب میں علامت کی کم سے کم ایک تبدیلی داخل ہوگی۔ اس طرح جب تمام اصلوں کے جواب میں مکمل حاصل ضرب ملجاتا ہے تو ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ حاصل کثیر رقی میں

علامت کی کم از کم اتنی تبدیلیاں موجود ہیں جتنی کہ اس کی مثبت اصلیں ہیں۔ یہی ڈیکارٹ کا مسئلہ ہے۔

۲۰۔ ڈیکارٹ کا قانون علامت۔ منفی اصلیں۔ منفی اصولوں

کی صورت میں ڈیکارٹ کا قانون بیان کرنے سے پیشتر ہم ثابت کریں گے کہ اگر مساوات $f(x) = 0$ میں x کی بجائے $-x$ لا مندرج کیا جائے تو حاصل مساوات کی اصلیں وہی ہونگی جو ابتدائی مساوات کی ہیں سوائے اس کے کہ ان کی علامتیں بدلا جائیں گی۔ دفعہ ۱۶ کی مساوات متانکہ

$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$ (لا - عم) .. (لا - عم)

سے نتیجہ مستنبط ہوتا ہے کیونکہ اس مساوات سے ہم اخذ کرتے ہیں

$f(-x) = (-x - a_1)(-x - a_2) \dots (-x - a_n)$ (لا + عم) .. (لا + عم)

اس سے ظاہر ہے کہ $f(-x) = 0$ کی اصلیں ہیں

پس $f(x) = 0$ کی منفی اصلیں $f(-x) = 0$ کی مثبت اصلیں ہونگی اور ہم منفی اصولوں کے لئے ڈیکارٹ کا قانون اس طرح بیان کر سکتے ہیں :-
مساوات $f(x) = 0$ کی منفی اصولوں کی تعداد کثیر قسمی $f(-x) = 0$ کی درجوں میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد سے زیادہ نہیں ہو سکتی۔

۲۱۔ خیالی اصولوں کے وجود کو ثابت کرنے میں ڈیکارٹ کے

قانون کا استعمال

ڈیکارٹ کے قانون کے استعمال سے مساواتوں میں خیالی اصولوں کے وجود کا پتہ لگانا اکثر ممکن ہو گا۔ کیونکہ اگر کسی مساوات کی مثبت اصلوں کی بڑی

سے بڑی ممکن تعداد اور منفی اصولوں کی بڑی سے بڑی ممکن تعداد کا مجموعہ مساوات کے درجہ سے کم ہو تو خیالی اصلیں یقیناً موجود ہونگی۔ مثال کے طور پر مساوات

$$۱۰ + ۱۰ + ۱۰ + ۱۰ + ۱۰ = ۰$$

لو۔ اس مساوات میں چونکہ علامت کی صرف ایک تبدیلی ہے اس درجہ سے ایک سے زیادہ مثبت اصل نہیں ہو سکتی۔ اب لا کو۔ لا میں بدلنے سے حاصل ہوگا

$$۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ = ۰$$

اب چونکہ اس میں علامت کی صرف ایک تبدیلی ہے اس لئے منفی اصولوں کی تعداد ایک سے زیادہ نہیں ہو سکتی۔ اس طرح مجوزہ مساوات میں دو سے زیادہ حقیقی

اصلیں موجود نہیں ہو سکتیں۔ اس لئے کم سے کم چھ خیالی اصلیں موجود ہونی چاہئیں۔ 31- ڈیکارٹ کے قانون کا یہ استعمال صرف غیر مکمل مساواتوں کی صورت میں مفید ہے کیونکہ جب مساوات مکمل ہو تو بآسانی یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ ف (لا) اور ف (لا) میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد کا مجموعہ مساوات کے درجہ کے بالکل مساوی ہوتا ہے۔ ۲۲- مسئلہ۔ اگر کثیر رشتہ ف (لا) میں ناکی بجائے دو عدد لا اور ب مندرج

کرنے سے نتیجے مختلف علامت حاصل ہوں تو مساوات ف (لا) = کی حقیقی اصولوں کی طاق تعداد ان عددوں کے درمیان واقع ہوگی۔ لیکن اگر نتیجہ ہم علامت ہوں تو ان عددوں کے درمیان یا تو کوئی حقیقی اصل واقع نہیں ہوگی یا حقیقی اصولوں کی جنت تعداد واقع ہوگی۔

اس مسئلہ میں ان نتیجوں کی عام سے عام صورت شامل ہے جو کسی مساوات کے پہلے رکن کی علامتوں سے مساوات کی اصولوں کے متعلق اخذ کئے جاسکتے ہیں جبکہ لا کی بجائے دو دئے ہوئے عدد مندرج کئے جائیں، چنانچہ دفعہ ۱۲ کا مسئلہ اس کی ایک خاص صورت ہے۔ ہم اس مسئلہ کا پہلا حصہ ثابت کریں گے۔ دوسرے حصہ کو بالکل اسی طریقہ پر ثابت کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ متقادیر لا اور ب کے درمیان مساوات ف (لا) = کی م اصلیں عم، عم، عم، عم، عم واقع ہوتی ہیں اور ان کے علاوہ کوئی اور اصلیں واقع نہیں ہوتیں۔ فرض کرو کہ لا چھوٹا ہے ب سے

فرض کرو کہ جب f (۱) کو m اجزائے ضربی کے حاصل ضرب (۱-۱-۱) (۱-۱-۱) (۱-۱-۱) ... (۱-۱-۱) سے تقسیم کیا جاتا ہے تو خارج قسمت f (۱) حاصل ہوتا ہے۔ تو مساوات مکمل ملے گی

$$f(1) = (1-1-1)(1-1-1) \dots (1-1-1) f(1)$$

اس میں یکے بعد دیگرے $1 = 1, 1 = 1$ ب رکھنے سے حاصل ہوگا

$$f(1) = (1-1-1)(1-1-1) \dots (1-1-1) f(1)$$

$$f(1) = (1-1-1)(1-1-1) \dots (1-1-1) f(1)$$

اب $f(1)$ اور $f(1)$ ہم علامت ہیں، کیونکہ اگر ان کی علامتیں مختلف ہوتیں تو دفعہ ۱۲ کی رو سے ان کے درمیان مساوات $f(1) = 1$ کی کم سے کم ایک اصل ہوتی۔ بموجب فرض $f(1)$ اور $f(1)$ کی علامتیں مختلف ہیں اس لئے حاصل ضربوں

$$(1-1-1)(1-1-1) \dots (1-1-1)$$

$$(1-1-1)(1-1-1) \dots (1-1-1)$$

کی علامتیں مختلف ہیں۔ لیکن دوسرے کی علامت مثبت ہے کیونکہ اس کے تمام اجزا مثبت ہیں۔ پس پہلے کی علامت منفی ہے لیکن اس کے تمام اجزا منفی ہیں۔ اس لئے ان کی تعداد طاق ہونی چاہیئے جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

اس مسئلہ میں یہ یاد رہے کہ ضعفی اصولوں کو اتنی مرتبہ شمار کیا گیا ہے جتنی مرتبہ دو تکرار پائی ہیں۔

اس دفعہ کے مسئلہ پر تریسیمی طریقہ کا استعمال کرنا فائدہ بخش ہوگا۔ اس نقطہ نظر سے اس مسئلہ کی صداقت خود واضح ہو جاتی ہے کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ جب کسی دو نقطوں کو ایک منحنی سے ملایا جاتا ہے تو ان نقطوں کے درمیان منحنی کا حصہ محور لا کو طاق مرتبہ قطع کرتا ہے جبکہ نقطے محوری مخالف سمتوں میں ہوں اور جفت مرتبہ قطع کرتا ہے

یا بالکل قطع نہیں کرتا جبکہ نقطہ محور کی ایک ہی جانب واقع ہوں۔

مثالیں

۱۔ اگر ایک مساوات کی سب رقموں کی علامتیں مثبت ہوں تو کوئی مثبت اصل نہیں ہو سکتی۔

۲۔ اگر کسی مکمل مساوات کی رقموں کی علامتیں یکے بعد دیگرے مثبت اور منفی ہوں تو کوئی اصل منفی نہیں ہو سکتی۔

۳۔ اگر ایک مساوات کی پہلی چند رقموں کی علامتیں مثبت ہوں اور ان کے بعد آنے والی رقموں کی علامتیں منفی تو صرف ایک اصل مثبت ہوگی اور اس سے زیادہ نہیں۔

دفعہ ۱۲ استعمال کرو اور صفر اور ∞ کا اندراج کرو۔ دفعہ ۱۹ بھی استعمال کرو۔
۴۔ اگر ایک مساوات میں لاکی صرف جفت قوتیں واقع ہوں اور سب سر مثبت ہوں تو کوئی حقیقی اصل نہیں ہو سکتی۔

دفعات ۱۹ اور ۲۰ کا استعمال کرو۔

۵۔ اگر ایک مساوات میں لاکی صرف طاق قوتیں واقع ہوں اور سب سر مثبت ہوں تو صفر اصل کے سوا کوئی حقیقی اصل نہ ہوگی۔

۶۔ اگر ایک مساوات مکمل ہو تو $(-)$ میں علامت کی تبادلوں کی تعداد $(-)$ میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد کے مساوی ہوگی۔

۷۔ اگر ایک مکمل مساوات کی تمام اصلیں حقیقی ہوں تو مثبت اصولوں کی تعداد علامت کی تبدیلیوں کی تعداد کے مساوی ہوگی اور منفی اصولوں کی تعداد علامت کی تبادلوں کی تعداد کے مساوی۔

۸۔ اگر ایک مساوات میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد جفت ہو تو اس کی آخری رقم کی علامت مثبت ہونی چاہیئے اور اگر تبدیلیوں کی تعداد طاق ہو تو اس کی آخری رقم منفی ہونی چاہیئے۔
لاکی بڑی سے بڑی قوت والی رقم کا سر مثبت ہو (دیکھو دفعہ ۱)۔

۹۔ مثال ۸ سے ثابت کرو کہ اگر ایک مساوات میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد جفت ہو تو مثبت اصولوں کی تعداد اس جفت عدد کے مساوی ہوگی یا اس سے چھوٹے جفت عدد کے مساوی۔ اور اگر تبدیلیوں کی تعداد طاق ہو تو مثبت اصولوں کی تعداد اس طاق عدد کے مساوی ہوگی یا اس سے چھوٹے طاق عدد کے مساوی۔ دوسرے الفاظ میں مثبت

اصولوں کی تعداد جب تبدیلیوں کی تعداد سے کم ہوتی ہے تو ان سے جفت عدد کا فرق رکھتی ہے۔
 صفر اور ۵۵ کا اندراج کرو اور وفد ۲۲ استعمال کرو۔

۱۔ مساوات

$$۳ - ۲ - ۱ = ۰$$

میں خیالی اصولوں کی تعداد کی سفلی حد معلوم کرو۔

جواب: کم از کم دو خیالی اصلیں

۱۱۔ مساوات

$$۱۵ + ۱۰ - ۱ - ۱ = ۰$$

کی اصولوں کی نوعیت معلوم کرو۔
 دفعات ۱۳، ۱۹، ۲۰ استعمال کرو۔

جواب: ایک مثبت، ایک منفی، دو خیالی

۱۲۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$۳ + ۲ - ۱ = ۰$$

کی ایک اصل منفی اور دو اصلیں خیالی ہیں جہاں ق اور ر لازماً مثبت ہیں۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$۳ - ۲ - ۱ = ۰$$

کی ایک اصل منفی ہے اور باقی دو اصلیں خیالی ہیں یا دونوں مثبت جہاں ق اور ر لازماً مثبت ہیں۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$\frac{۱}{۱-ا} + \frac{۲}{۲-ب} + \frac{۳}{۳-ج} + \dots + \frac{۱}{۱-ل} = ۱-م$$

کی اصل خیالی نہیں ہو سکتی جہاں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰ سب کے سب ایک دوسرے سے مختلف ہیں۔

۱۵۔ لاکھ بجائے علی الترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰ درج کرو اور پھر تفریق

کرو تو ایسا جملہ ملے گا جو صفر ہے۔ یعنی پرمعوم ہو سکتا ہے۔

۱۵۔ ثابت کرو کہ اگر ن جفت ہو تو مساوات

$$۱ - ۱ = ۰$$

کی صرف دو حقیقی اصلیں ۱ اور ۱ ہیں اور ان کے علاوہ اور کوئی حقیقی اصل نہیں ہے اور اگر ان طاق ہو تو اس مساوات کی صرف ایک حقیقی اصل ۱ ہے اور کوئی دوسری حقیقی اصل نہیں ہے یہ اور سوال ۱۶ دفعات ۱۶ اور ۲۰ سے اخذ ہو سکے ہیں۔

۱۶ — ثابت کرو کہ اگر ان جنس ہو تو مساوات

$$x^n + 1 = 0$$

کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہے اور اگر ان طاق ہو تو صرف ایک حقیقی اصل ۱ ہے اور کوئی دوسری حقیقی اصل نہیں ہے۔

۱۷ — مساوات

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$$

کو حل کرو۔

یہ مساوات شکل

$$(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 1) = 0$$

میں لکھی جاسکتی ہے۔

$$\text{جواب: } x = -1, -i, i, 1$$

جذروں کی علامتوں سے چار اجتماع حاصل ہوتے ہیں اور جملہ بالا میں چار اصلیں شامل ہیں۔

۱۸ — وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں جملہ

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$$

کی چار مختلف قیمتیں ہوں جہاں $x^2 = -1$

اگر طے کے اذخاں سے کوئی قیید نہ لگے گی تاہی تو اس جملہ کی قیمتیں ہوتیں یہاں ۱۶ کو دوسرے جذر کے اندر اور اس کے باہر دونوں جگہ ایک ہی علامت کے ساتھ لینا چاہیئے۔ اس لئے کل چار قیمتیں ملتی ہیں۔

$$\text{جواب: } x = 1, -1, i, -i$$

۱۹ — وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں جملہ

$$- 9 + ط + ۱۳۷۳ + ۳۴۳ - ۲ ط ۱۳۷۳$$

کی چار قیمتیں ہوں جہاں $ط^۲ = ۱$ ۔

جواب :- $لا^۲ + ۳۶ + ۳۰۰ - لا^۲ - ۳۱۶۸ + ۳۴۳ = ۷۷۰$ ۔

۲۰۔ — منطق سروں والی ایک مساوات بناؤ جسکی اہلیں جملہ

$$ط، راپ + ط، راق + ط، رار$$

کی تمام قیمتیں ہوں جہاں

$$ط^۲ = ۱، ط^۱ = ۱، ط^۰ = ۱$$

اس جملہ کی کل ۸ مختلف قیمتیں ہیں یعنی

$$راپ + راق + رار، راپ - راق - رار$$

$$راپ - راق - رار، راپ + راق + رار$$

$$راپ + راق - رار، راپ - راق + رار$$

$$راپ - راق + رار، راپ + راق - رار$$

فرض کرو کہ

$$لا = ط، راپ + ط، راق + ط، رار$$

مربع لینے سے

$$لا^۲ = پ + ق + ر + ۲ (ط، راق + ط، رار + ط، راپ + ط، راق) \quad (۱)$$

ارقام کو مستقل کرنے اور پھر مربع لینے سے

$$(لا^۲ - پ - ق - ر) = ۲ (ط، راق + ط، رار + ط، راپ + ط، راق)$$

$$+ ۸ ط، ط، راپ + ۲ (ط، راپ + ط، راق + ط، رار)$$

ارتقا کو منتقل کرنے، طم راپ + طم راق + طم رار کی بجائے لا درج کرنے اور مرتب لینے سے بالآخر ہمیں مساوات ملتی ہے

$$\{ \text{لا}^2 - ۲ \text{لا} (پ + ق + ر) + ۲پ^2 + ق + ۲ر - ۲پ - ۲پ ق \}$$

$$= ۶۴ پ ق ر \text{لا}^2$$

جو جذر کی علامتوں سے آزاد ہے۔

یہ آٹھ درجی مساوات ہے جس کی اصلیں وہ ہیں جو اد پر لکھی گئی ہیں۔

چونکہ طم، طم، طم غائب ہو چکے ہیں اس لئے ۸ اصلوں \pm راپ

\pm راق \pm رار میں سے کسی کو لا کے مساوی فرض کیا جاسکتا ہے۔ محصلہ مساوات اس طرح بھی حاصل ہو سکتی تھی کہ لا میں سے ہر اصل کو تفریق کیا جائے اور پھر ان کو مسلسل ضرب دیا جائے جس طرح دفعہ ۱۶ کی مثال ۶ میں کیا گیا تھا۔



نتیجہ صریح (۱) مساوات کی ہر اصل اس کی مطلق رقم کا ایک مقسوم علیہ ہوتی ہے۔

نتیجہ صریح (۲) اگر مساوات کی سب اصلیں مثبت ہوں تو سر بشمول لاکہ بڑی

سے بڑی قوت والی رقم کے سر کے (باری باری سے مثبت اور منفی ہونگے۔ اور اگر سب اصلیں منفی ہوں تو سب سر مثبت ہونگے۔ یہ بات مساواتوں (۲) سے ظاہر ہے۔

{ دیکھو دفعات ۱۹ اور ۲۰ }

۲۴۔ مسئلہ بالا کے اطلاقاً۔ دفعہ سابق کی مساواتوں (۲) سے چونکہ سر

اور ن اصلوں کے درمیان جدا جدا ن ربط ملتے ہیں اس لئے ممکن ہے یہ خیال پیدا ہو کہ مساوات کا عام حل دریافت کرنے میں اس سے کوئی فائدہ ہوگا۔

درحقیقت یہ بات نہیں ہے کیونکہ فرض کرو کہ ان مساواتوں کی مدد سے ہم ابتدائی مساوات کی ایک اصل عم حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔ یہ اس وقت ممکن ہے جبکہ دی ہوئی مساواتوں کی مدد سے دوسری اصلوں کو سا قط کیا جائے اور بالآخر وہ مساوات حاصل کی جائے جس کی ایک اصل عم ہے۔

اب خواہ کسی طریقہ سے یہ آخری مساوات حاصل ہو اس میں اصل عم کے

37

علاوہ دوسری اصلیں عم عم ... عن بھی موجود ہونگی اور عم کے دریافت کرنے

میں ان کو بھی دریافت کرنا پڑے گا۔ کیونکہ مساواتوں (۲) میں سب کی سب اصلیں

ایک ہی طریقہ سے داخل ہوتی ہیں اور اس لئے اگر باقی دوسری اصلوں کو سا قط کر کے

عم کا معلوم کرنا مقصود ہو (یا کسی دوسری اصل کا) تو ہم ایسی مساوات پر پہنچیں گے

جو عم کے لئے حاصل شدہ مساوات سے صرف اس قدر فرق رکھتی کہ اصل

عم کے بجائے اصل عم (یا وہ دوسری اصل) موجود ہوگی۔ اسلئے عمل اسقاط سے

ہمیں ایسی مساوات ملیگی جس کی ن اصلیں عم عم ... عن ہوتی یا ہمیں

اور اسلئے ایسی مساوات حاصل کرنا اتنا ہی مشکل ہے جتنا کہ دی ہوئی مساوات کا۔

یہ آخری مساوات فی الحقیقت ابتدائی مساوات ہے جس میں مطلوبہ اصل لاکہ

بجائے واقع ہوتی ہے۔ چنانچہ ہم کبھی مساوات کی صورت لیکر اس بات کو ثابت کرینگے۔ طریق عمل بالکل عام ہوگا اور اس لئے کسی درجہ کی مساوات پر جاری کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ مساوات

$$L^2 + L^2 + L^2 + L^2 + L^2 = 5L^2$$

کی اٹلیں عہدہ، جہ ہیں۔

دفعہ ۲۳ سے ہمیں حاصل ہوگا

ب = (ع + هـ + ج)

ب.م = ح + ح + ح + ح + ح

بسم - - عرجه جہ

ان میں سے پہلی مساوات کو x سے اور دوسری کو y سے ضرب دو اور تینوں کو جمع کرو تو

بب عا + بب عه + ببم = عا

یا $\text{ع}^2 + \text{ب}^2 \text{ع}^3 + \text{ب}^2 \text{ع}^4 + \text{ب}^2 = 0$

جو دی ہوئی کنبی مساوات ہے جس میں لاکھ بجائے عہ ہے۔

طالب علم مشق کے طور پر اسی نتیجہ کو ثابت کرنے کے لئے درجہ چہارم کی مساوات لے سکتا ہے۔ عام صورت میں صرف یہ کرنا ہوگا کہ دفعہ ۲۳ کی مساواتوں کو علی الترتیب ۱، ۲، ۳..... سے ضرب دیکر انکو جمع کیا جائے۔ اگرچہ مساواتوں (۲) سے مساوات کا عام حل دریافت کرنے میں کوئی مدد نہیں ملتی لیکن اکثر عددی مساواتوں کا حل معلوم کرتے وقت ان سے سہولت پیدا ہوتی ہے جبکہ اصولوں کے درمیان کوئی خاص ربط دئے گئے ہوں۔ ان کو وہ رشتے معلوم کرنے میں بھی استعمال کیا جاسکتا ہے جو سروں کے درمیان ہونے چاہئیں جبکہ اصولوں کے درمیان رشتے دئے گئے ہوں۔

مثالیں

۱ — مساوات

$$۵ - لا - ۱۶ - لا + ۸۰ = ۰$$

کو حل کرو جبکہ اس کی دو اصلوں کا مجموعہ صفر ہو۔

فرض کرو کہ اصلیں ع، ب، جہ، ہیں تو

$$۵ = ع + ب + جہ$$

$$۱۶ = ع + جہ + ب$$

$$۸۰ = ع + جہ$$

ب + جہ = ۰ لینے سے ان میں سے پہلی مساوات سے حاصل ہوگا ع = ۵

اور پھر دوسری یا تیسری مساوات سے حاصل ہوگا ب + جہ = -۱۶۔ اس طرح ب اور جہ

کی قیمتیں حاصل ہونگی ۴ اور -۴۔ اس لئے مطلوبہ اصلیں ۵، ۴، -۴ ہیں۔

۲ — مساوات

$$۳ - لا + ۲ = ۰$$

کو جس کی دو اصلیں مساوی ہیں حل کرو۔

فرض کرو کہ اس کی تین اصلیں ع، ب، جہ ہیں تو

$$۳ = ع + ب + جہ$$

$$۰ = ع + جہ + ۲$$

جن سے ع = ۲، ب = -۱ حاصل ہوگا۔ اس لئے مطلوبہ اصلیں ۲، ۲، -۱ ہیں۔

۳ — مساوات

$$۴ - لا - ۲ - لا + ۱۲ - لا + ۹ = ۰$$

میں مساوی اصلوں کے دو زوج ہیں۔ انہیں معلوم کرو۔

فرض کرو کہ اصلیں ع، ب، جہ، ہیں تو

$$۴ = ع + جہ + ۲$$

$$۰ = ع + جہ + ۴$$

ان سے عہ اور بہ کی قیمتیں ۱ اور ۳ حاصل ہونگی۔

۴ — مساوات

$$۱۰ - ۱۱۹ + ۱۱۱۳ + ۲۴ = ۰$$

کو جس کی دو اصلیں ۳ اور ۲ کی نسبت رکھتی ہیں حل کرو۔

فرض کرو کہ اصلیں عہ، بہ، جہ ہیں اور ۲ عہ = ۳ بہ تو عہ کے استقامت سے نہیں بہ آسانی حاصل ہوگا

$$۱۸ = ۵ + ۲ + ۱۱$$

$$۲۸ = ۲ + ۵ + ۱۱$$

(39)

ان مساواتوں سے ہمیں یہ میں مساوات درجہ دوم حاصل ہوگی

$$۱۹ - ۲۰ + ۵۶ = ۰$$

اس کی اصلیں ۴ اور ۱۳ ہیں۔ پہلی اصل سے عہ اور جہ کی قیمتیں ۶ اور ۱ حاصل ہونگی۔ اسلئے مطلوبہ اصلیں ۶، ۴، ۱ ہیں۔

طالب علم یہاں پوچھ سکتا کہ بہ کی قیمت $\frac{۱۳}{۱۹}$ کا کیا مطلب ہے۔ گذشتہ مثالوں میں بھی یہ دقت پیش آئی ہوگی۔ لیکن یہ معلوم رہے کہ اس نوعیت کی مثالوں میں مطلوبہ نامعلوم مقداروں کو معلوم کرنے کے لئے ہمیں اصولوں اور سرور کے درمیان تمام روابط کو استعمال کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ دی ہوئی شرط سے اصولوں کے درمیان ایک یا زیادہ ربط قائم ہو جاتے ہیں۔ جب کبھی یہ صورت پیدا ہو کہ اثنائے عمل میں استعمال ہونے والی مساواتوں سے اصولوں کے لئے قیمتوں کے ایک نظام سے زیادہ نظام حاصل ہوں تو اتنی اصلیں اس شرط کی مدد معلوم ہو سکتی ہیں کہ وہ اُس مساوات (یا ان مساواتوں) کو پورا کرتی ہیں جو اصولوں اور سرور کے درمیان ہیں اور جن کا استعمال ان اصولوں کو معلوم کرتے وقت نہیں کیا گیا ہے۔ مثلاً موجودہ مثال میں قیمت بہ = ۴ سے قیمتوں کا ایسا نظام ملتا ہے جو متروکہ مساوات

$$۲۴ = ۵ + ۲ + ۱۱$$

کو پورا کرتا ہے۔ قیمت بہ = $\frac{۱۳}{۱۹}$ سے قیمتوں کا ایسا نظام ملتا ہے جو اس مساوات کو

پورا نہیں کرتا اور اسلئے مسترد کر دیا گیا ہے۔

۵ — مساوات

$$لا^۱ - لا^۲ + لا^۳ - لا^۴ = ۱۵$$

کو جس کی اصلیں سلسلہ حسابیہ میں ہیں حل کرو۔

فرض کرو کہ اصلیں عہ - فدہ، عہ + عہ + فدہ ہیں تو

$$۳ عہ = ۹$$

$$۳ عہ - فدہ = ۲۳$$

جن سے ہمیں تین اصلیں ۱، ۳، ۵ حاصل ہونگی۔

۶ — مساوات

$$لا^۱ + لا^۲ - لا^۳ - لا^۴ = ۲۰$$

کو جسکی اصلیں سلسلہ حسابیہ میں ہیں حل کرو۔

یہاں فرض کرو کہ اصلیں عہ - ۳ فدہ، عہ + ۳ فدہ، عہ + ۳ فدہ ہیں۔

$$جواب :- ۵، ۲، ۱$$

۷ — مساوات

$$لا^۱ + لا^۲ - لا^۳ - لا^۴ = ۸$$

کو جسکی اصلیں سلسلہ ہندیہ میں ہیں حل کرو۔

یہاں فرض کرو کہ اصلیں عہ ر، عہ عہ ہیں۔ دفعہ ۲۳ کی مساواتوں (۲) میں

تیسری مساوات سے ہمیں عہ = ۲ یا عہ = ۲ حاصل ہوگا اور پھر پہلی یا دوسری

مساوات سے ر میں درجہ دوم کی مساوات حاصل ہوگی۔

$$جواب :- ۲، ۲، ۲$$

۸ — مساوات

$$لا^۱ - لا^۲ + لا^۳ - لا^۴ = ۲۰$$

کو جسکی اصلیں سلسلہ ہندیہ میں ہیں حل کرو۔

یہاں فرض کرو کہ اصلیں عہ عہ، عہ عہ، عہ عہ ہیں۔ دفعہ ۲۳ کی مساواتوں

(۲) میں سے دوسری اور چوتھی مساوات استعمال کرو۔

جواب :- $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

۹ — مساوات

$$لا^۲ + ۱۵ لا + ۷۰ = لا^۲ + ۱۲۰ + ۷۴ = ۰$$

کو جبکی اصلیں سلسلہ ہندسیہ میں ہیں حل کرو۔

جواب :- $۱ - ۲ - ۴ - ۸$

۱۰ — مساوات

$$لا^۲ - ۱۱ لا + ۱۰ = ۰$$

کو جبکی اصلیں سلسلہ موسیقیہ میں ہیں حل کرو۔

فرض کرو کہ اصلیں 'عہ'، 'بہ'، 'جہ' ہیں تو ہمیں ربطی لگا

$$\frac{۲}{۱} = \frac{۱}{جہ} + \frac{۱}{عہ}$$

پس $بہ = جہ + جہ + عہ = ۳ جہ + عہ$ وغیرہ

جواب : $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{۲}$

۱۱ — مساوات

$$لا^۲ - ۸ لا - ۱۸ = لا^۲ - ۳۶ + ۸ = ۰$$

کو جبکی اصلیں سلسلہ موسیقیہ میں ہیں حل کرو۔

جواب :- $\frac{۲}{۳}, \frac{۲}{۴}, \frac{۲}{۳}$

۱۲ — اگر مساوات

$$لا^۲ - ف لا + ق لا - ر = ۰$$

کی اصلیں سلسلہ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ اوسط اصل $\frac{۳}{۲}$ ہے۔

۱۳ — مساوات

$$لا^۲ - ۲ لا + ۴ لا - ۱۱ لا - ۲۱ = ۰$$

کی دو اصلیں مساوی مگر مختلف علامت ہیں۔ اسکی سب اصلیں معلوم کرو۔

عہ + بہ = ۰۔ نو اور دفعہ ۲۲ کی مساواتوں (۲) میں سب سے پہلی

اور تیسری مساوات استعمال کرو۔

جواب: $3x - 3x' \pm 1' - 6x$

۱۴ — مساوات

$$3x - 25x' + 50x'' - 50x''' + 12 = 0$$

کی دو اصلوں کا حاصل ضرب ۲ ہے۔ سب اصلیں معلوم کرو۔

جواب: $6x', \frac{1}{3}x'', \frac{1}{3}x'''$

۱۵ — کبھی مساوات

$$x^2 - f + a + q - r = 0$$

کی ایک اصل دوسری کا دو چند ہے۔ ثابت کرو کہ پہلی اصل کو ایک مساوات درجہ دوم سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

۱۶ — ثابت کرو کہ مساوات

(41)

$$x^2 + x + 1 + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} + x^n = 0$$

کی سب اصلیں معلوم ہو سکتی ہیں اگر وہ سلسلہ حسابیہ میں ہوں۔

فرض کرو کہ اصلیں x, x^2, x^3, \dots, x^n ہیں تو مساواتوں (۲) میں سے پہلی مساوات سے حاصل ہوگا

$$-x^n = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 \quad \{ (1-x)^n \}$$

$$x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1 = \frac{(1-x)^n}{1-x} \quad (1)$$

پھر چونکہ مقداروں کی کسی تعداد کے مربعوں کا مجموعہ = ان مقداروں کے مجموعہ کا مربع منفی ان میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کا دو چند اسلئے

$$x^{2n} - 2x^n + 1 = (x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1)^2 - 2(x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1) \dots$$

$$= x^{2n} + 2x^n + 1 - 2(x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1) = \frac{(1-x)^n(1-x^2)}{1-x}$$

(۲)

(۱) کے مربع کو (۲) کے x^n کے میں سے تفریق کرو تو $x^{2n} - 2x^n + 1$ اور x^n کی قوم میں

طبیعیات کا۔ پھر ہم مساوات (۱) سے e معلوم کر سکتے ہیں۔ اسی طرح تمام اصولوں کو سروں b اور b' کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے۔

۱۷۔ وہ شرط معلوم کرو جو مساوات

$$f - f' = \frac{a}{a'} - \frac{b}{b'}$$

کے سروں سے پوری ہوئی جائے اگر اس کی دو اصولوں e ، b میں ربط $e + b = 0$ موجود ہو۔

جواب :- $f - f' = 0$

۱۸۔ وہ شرط معلوم کرو کہ کبھی مساوات

$$f - f' = \frac{a}{a'} - \frac{b}{b'}$$

کی اصلیں سلسلہ ہندسیہ میں ہوں۔

جواب :- $f - f' = 0$

۱۹۔ وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات بالا کی اصلیں سلسلہ موسیقیہ میں ہوں۔

(دیکھو مثال ۱۲) جواب :- $f - f' = 0$

۲۰۔ وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات

$$f - f' = \frac{a}{a'} - \frac{b}{b'}$$

کی دو اصولوں میں ربط $e + b = 0$ موجود ہو اور اس صورت میں درجہ دوم کی دو مساواتیں معلوم کرو جنکی اصلیں (۱) e ، b اور (۲) e ، b' ہوں۔

جواب :- $f - f' = 0$

$$(1) f - f' = 0$$

$$(2) f - f' = \frac{a}{a'}$$

۲۱۔ وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات بالا کی اصولوں میں ربط $e + b = 0$ موجود ہو۔

موجود ہو۔

جواب :- $f - f' = 0$

۲۲۔ وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات

$$f - f' = \frac{a}{a'} - \frac{b}{b'}$$

کی اصلوں ϵ ، β ، γ ، δ ، ϵ ، ζ میں ربط $\epsilon\beta = \gamma\delta = \zeta\epsilon$ جو ضہ موجود ہو۔

جواب :- ف^۱س - ر^۱ = .

۲۳ - ثابت کرو کہ سوال ۲۲ میں حاصل شدہ شرط اس وقت بھی پوری ہوتی ہے جبکہ درجہ چہارم کی مساوات کی اصلیں سلسلہ ہندسہ میں ہوں -

۲۵ - مساوات کے درجہ کا تنزل جبکہ اسکی دو اصلوں میں (42)

کوئی ربط موجود ہو۔

ہم نے دفعہ سابق کی مثالوں میں یہ دیکھا ہے کہ اصلوں کے درمیان کوئی خاص روابط موجود ہوں تو ان کو متعین کرنے میں سروں اور اصلوں کو ملائی مساواتوں کا کیا فائدہ ہے۔ اب ہم عام صورت میں یہ ثابت کرینگے کہ

اگر مساوات ف (لا) = . کی اصلوں میں سے دو کے درمیان $\beta = \gamma\delta$ (ع) کی شکل کا ربط موجود ہو تو مساوات کا درجہ بعد ۲ کے گھٹایا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ مساوات متماثلہ

$$ف (لا) = \beta \cdot لا^۱ + \gamma \cdot لا^۲ + \delta \cdot لا^۳ + \epsilon \cdot لا^۴ + \zeta \cdot لا^۵ + \dots + \eta \cdot لا^۱۰$$

میں لا کی بجائے فہ (لا) مندرج کیا گیا ہے تو

$$ف (فہ لا) = \{\beta \cdot فہ (لا) + \gamma \cdot فہ (لا) + \delta \cdot فہ (لا) + \epsilon \cdot فہ (لا) + \zeta \cdot فہ (لا) + \dots + \eta \cdot فہ (لا)\}$$

اس مساوات متماثلہ کے دوسرے رکن کو ہم سہولت کی خاطر فا (لا) سے تعبیر کرتے ہیں۔ اب لا کی بجائے عہ مندرج کرنے سے

$$فا (عہ) = ف (فہ (عہ)) = ف (عہ) = .$$

پس مساوات فا (لا) = . کو عہ پورا کرتا ہے اور یہ ف (لا) = . کو بھی

پورا کرتا ہے۔ اس لئے کثیرالارتقام ف (لا) اور فا (لا) کا جزو مشترک لا۔ عہ ہے اس طرح عہ معلوم ہو سکتا ہے اور اس سے قد (عہ) یا بہ معلوم ہو جاتا ہے اور اسلئے دی ہوئی مساوات کے درجہ کو بقدر ۲ کے گھٹایا جاسکتا ہے۔

مثالیں

۱۔ مساوات

$$لا^۲ - ۵ لا - لا^۳ + ۲۰ = ۰$$

کی دو اصلوں میں فرق = ۳۔ انہیں معلوم کرو۔

یہاں بہ - عہ = ۳، بہ = ۳ + عہ۔ دئے ہوئے کثیرالارتقام ف (لا) میں لا کی بجائے لا + ۳ مندرج کرو تو یہ کثیرالارتقام لا^۲ + ۲ لا - ۱۰ ہو جائیگا۔ اس کا اور ف (لا) کا جزو مشترک لا - ۲ ہے جس سے عہ = ۲، بہ = ۵ حاصل ہوگا۔ تیسری اصل - ۲ ہے۔

۲۔ مساوات

$$لا^۲ - ۵ لا^۳ + ۱۱ لا - ۶ = ۰$$

کی دو اصلوں میں ربط ۲ بہ + ۳ عہ = ۷ موجود ہے۔ اسکی سب اصلیں معلوم کرو۔

جواب :- ۱، ۲، ۱، ۱، ۱، ۲

یہاں یہ بات واضح رہے کہ جب دو کثیرالارتقام ف (لا) اور فا (لا) میں مشترک اجزائے ضربی ہوں تو یہ اجزائے ضربی مقسوم علیہ اعظم دریافت کرنے کے معمولی طریقہ سے حاصل ہو سکتے ہیں۔ مثلاً اگر ہمیں یہ معلوم ہو کہ دو دی ہوئی مساواتوں میں مشترک اصلیں موجود ہیں تو دے ہوئے کثیرالارتقام کے مقسوم علیہ اعظم کو صفر کے مساوی رکھنے سے ہم ان اصلوں کو معلوم کر سکتے ہیں۔

مثالیں

۱۔ مساواتوں

$$۲\lambda^۲ + ۵\lambda - ۶ = ۰$$

$$۳\lambda^۲ + ۷\lambda - ۱۱ = ۰$$

میں دو اصلیں مشترک ہیں۔ انکو معلوم کرو۔

جواب :- $\lambda = ۱, -۲$

۲ — مساواتوں

$$\lambda^۲ + ۲\lambda + ۱ = ۰$$

$$\lambda^۲ + ۲\lambda + ۱ = ۰$$

میں دو اصلیں مشترک ہیں۔ وہ دو درجی مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں یہ اصلیں ہوں۔ ہر مساوات کی تیسری اصل بھی دریافت کرو۔

$$\text{جواب :- } \lambda^۲ + \frac{۲\lambda + ۱}{\lambda^۲ + ۲\lambda + ۱} = ۰$$

$$\frac{-(\lambda^۲ + ۲\lambda + ۱)}{\lambda^۲ + ۲\lambda + ۱}$$

۲۶ — اکائی کے جذر الکعب۔

$$\lambda^۳ - ۱ = ۰$$

کئی شکل کی مساواتوں کو جنہیں صرف بڑی سے بڑی قوت والی رقم اور مطلق رقم مثال ہوں ہم ثنائی مساواتیں کہیں گے۔ قبل الذکر مساوات کی اصلوں کو ہم اکائی کے λ میں جذر کہیں گے۔ اگلے باب میں ان شکلوں پر بحث کی جائیگی۔ فی الحال ہم ثنائی کعبی مساوات کی سادہ صورت پر اکتفا کرتے ہیں جس کے لئے اصلوں کی بعض سودمند خواص بہ آسانی ثابت کئے جاسکتے ہیں۔ دفعہ ۱۲ مثال ۵ میں ہم نے ثابت کیا ہے کہ کعبی مساوات

$$\lambda^۳ - ۱ = ۰$$

کی اصلیں حسب ذیل ہیں

ان خیالی اصلوں میں سے کسی ایک کو اگر ہم سہ سے تعبیر کریں تو دوسری خیالی اصل سہ^2 ہو جائیگی۔ مربع لینے سے یہ بات ظاہر ہے یا اس کو ہم اس طرح بھی ثابت کر سکتے ہیں:-

اگر کبھی کسی ایک اصل سہ ہو تو سہ^2 بھی ایک اصل ہونی چاہئے کیونکہ $\text{سہ}^2 = 1$ اس لئے مربع لینے سے $\text{سہ}^2 = 1$ یعنی $(\text{سہ}^2) = 1$ اس طرح سہ^2 بھی کبھی مساوات $\text{لا}^2 = 1$ کو پورا کرتا ہے اور اسلئے اسکی ایک اصل سہ بھی ہے۔ اب ہمیں مساوات متماثلہ ملیں

$$\text{لا}^2 = 1 \Rightarrow (1 - \text{لا}) (\text{لا} - \text{سہ}) (\text{لا} - \text{سہ}^2)$$

$$\text{لا}^2 = 1 \Rightarrow (1 + \text{لا}) (\text{لا} + \text{سہ}) (\text{لا} + \text{سہ}^2)$$

حاصل ہوگی جس سے

$$\text{لا}^2 = 1 + \text{لا}$$

کی اصلیں معلوم ہونگی۔

جہاں کہیں مقداروں کے کسی حاصل ضرب میں اکائی کے جذرا لکعب داخل ہوں اور انکی قوتیں ۲ سے زیادہ پیش ہوں تو ہم انکی بجائے سہ^2 یا سہ^4 یا ایک رکھ سکتے ہیں مثلاً

$$\text{سہ}^2 = \text{سہ}^2 \times \text{سہ}^2 = \text{سہ}^4 = \text{سہ}^2 \times \text{سہ}^2 = \text{سہ}^4$$

$$\text{سہ}^2 = \text{سہ}^2 \times \text{سہ}^2 = 1$$
 وغیرہ

دفعہ ۲۳ کی مساواتوں (۲) میں سے پہلی یا دوسری مساوات سے

اکائی کے جذرا لکعبوں کی حسب ذیل خاصیت ملتی ہے

$$1 + \text{سہ} + \text{سہ}^2 = 0$$

اس مساوات کی مدد سے کسی جملہ کو جس میں حقیقی مقداریں اور خیالی جذرا لکعب داخل ہوں ہم $\text{ف} + \text{سہ ق} + \text{سہ}^2 \text{ق} + \text{سہ}^3 \text{ق} + \text{سہ}^4 \text{ق}$ میں سے کسی ایک شکل میں لکھ سکتے ہیں۔

مثالیں

۱ — ثابت کرو کہ حاصل ضرب

$$(س م + س ن) (س م + س ن)$$

منطق ہے۔

جواب :- م - م ن + ن

۲ — حسب ذیل متماثلہ مساد اتوں کو ثابت کرو۔

$$م + ن = (م + ن) (س م + س ن)$$

$$م - ن = (م - ن) (س م - س ن)$$

۳ — ثابت کرو کہ حاصل ضرب

$$(ع + س ی + س ج) (ع + س ی + س ج)$$

منطق ہے۔

جواب :- ع + ی + ج + ج + ی + ع

۴ — متماثلہ مساوات

$$(ع + ی + ج) (ع + س ی + س ج) (ع + س ی + س ج)$$

$$\equiv ع + ی + ج + ج + ی + ع$$

کو ثابت کرو۔

۵ — متماثلہ مساوات

$$(ع + س ی + س ج) + (ع + س ی + س ج)$$

$$\equiv (ع - ی - ج) (ع - ی - ج) (ع - ی - ج)$$

سوال (۲) استعمال کرو۔

کو ثابت کرو۔

۶ — متماثلہ مساوات

$$(ع + س ی + س ج) - (ع + س ی + س ج)$$

$$\equiv ۳ - ۳ (ع - ی - ج) (ع - ی - ج)$$

سوال (۲) استعمال کرو اور سہ - سہ کی بجائے اسکی قیمت

کو ثابت کرو۔

۷۔ ۳ درج کرو۔

۸۔ متماثلہ مساوات

$(ع^۲ + ی^۲ + ج^۲ - ۳ عہ بہ جہ) \equiv (ع^۲ + ی^۲ + ج^۲ - ۳ عہ بہ جہ)$
کو ثابت کرو جہاں

$$عہ = ع^۲ + ی^۲ + ج^۲ = ۲ + جہ عہ = جہ + ۲ + عہ = ۲ + عہ بہ$$

۹۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

$$م + ن، م + م + سہ ن، سہ م + سہ ن$$

جواب :- لا۔ ۳ م ن لا۔ (م + ن) = ۰۔

۱۰۔ وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں

$$ل + م + ن، ل + م + سہ ن، ل + سہ م + سہ ن$$

ہیں۔

جواب :- لا۔ ۳ ل لا + (ل - م ن) لا۔ (ل + م + ن - ۳ ل م ن) = ۰۔

یہ یاد رکھنا ضروری ہے کہ اکائی کے ن، م، ن میں جذروں کے جواب میں کسی تقارر کے ن، م، ن میں جذر ہوتے ہیں۔ مساوات

$$لا - ۱ = ۰$$

کی اصلیں ۱ کے ن، م، ن میں جذر ہیں۔

مثلاً ۱ کے تین جذر الکعب ہیں

$$۱، ۱، ۱$$

جہاں ۱ سے معمولی حسابی عمل کے بموجب ۱ کا حقیقی جذر الکعب

تعبیر ہوتا ہے۔ ان میں سے ہر جذر مساوات لا۔ ۱ = ۰ کو پورا کرتا ہے۔ یہ واضح رہے کہ مندرجہ بالا تین جذر الکعب حاصل ہو جاتے ہیں اگر ان میں سے کسی ایک کو ۱، ۱، ۱ سے ضرب دیا جائے۔

پس ہم دیکھتے ہیں کہ حقیقی جذر الکعب کے علاوہ دو خیالی جذر الکعب بھی ہوتے ہیں جو حقیقی جذر الکعب کو اکائی کے خیالی جذر الکعبوں سے ضرب

دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔ مثلاً معمولی جذرا لکعب ۳ کے علاوہ عدد ۲۷ کے دو خیالی جذرا لکعب

$$-\sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} - \sqrt[3]{\frac{3}{2}} - \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

ہیں۔ انکا کعب لینے سے اس بیان کی تصدیق ہو سکتی ہے۔
۱۰۔ وہ منطق مساوات بناؤ جس کی ایک اصل

$$\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}$$

ہو جہاں سے ۱ = ۱ - سوال ۸ کے ساتھ مقابلہ کرو۔

جواب :- لا ۳ + ۳ ف لا ۲ ق = ۰

۱۱۔ منطق سروں کے ساتھ مساوات بناؤ جسکی ایک اصل

$$\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}$$

ہو جہاں سے ۱ = ۱ طم ۳ = ۱ - مساوات

$$\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}$$

کی طرفین کا کعب لینے سے اور لا کی بجائے اسکی بائیں طرف کی قیمت درج کر نیسے مساوات یلگی

$$\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} = 3$$

پھر طرفین کا کعب لینے سے حاصل ہوگا

$$(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2})^3 = 27$$

اب چونکہ طم اور طم میں سے ہر ایک کی قیمت ایسا سے یا سے ہو سکتی ہے اسلئے اس مساوات کی نو اصلیں ہیں

$$\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} = 27$$

سہ لاف + سہ لاق ' سہ لاف + لاق ' سہ لاف + لاق

سہ لاف + سہ لاق ' لاف + سہ لاق ' لاف + سہ لاق

ہم یہاں یہ بھی دیکھتے ہیں کہ آخری مساوات میں طم اور طم داخل نہیں ہوتے
اسلئے ابتداً ان اصولوں میں سے کسی ایک کو لا کے مساوی قرار دیا جاسکتا ہے اور
مساوات مرتب کی جاسکتی ہے۔ آخری مساوات اس طرح بھی حاصل ہو سکتی تھی کہ
ہم لا - لاف - لاق کی شکل کے نو اجزائے ضربی کو باہم ضرب دیتے

جہاں یہ نو اجزائے ضربی مندرجہ بالا نو اصولوں سے حاصل ہوتے ہیں۔

۱۲۔ تین کعبی مساواتیں علیحدہ علیحدہ بناؤ جنکی اصلیں مثال مابقی کی مساوات کی
اصولوں میں سے تین تین (انتخابی ستونوں میں لکھی ہوئیں) کے جٹ ہوں۔
ہم ان مساواتوں کو مثال ۸ کی مدد سے لکھ سکتے ہیں اس طور پر کہ پہلے م

اور ن کو لاف ' لاق کے مساوی ' لاف سہ لاف ' سہ لاق کے مساوی
اور آخر میں سہ لاف ' سہ لاق کے مساوی لیتے ہیں۔

جواب :- لا ۳ - لاف ق لا - ف - ق =۔

لا ۲ - سہ لاف ق لا - ف - ق =۔

لا ۳ - سہ لاف ق لا - ف - ق =۔

۲۷۔ اصولوں کے متشاکل تفاعل - کسی مساوات کی

اصولوں کے متشاکل تفاعل وہ تفاعل ہیں جنہیں اصلیں ایک ہی وضع پر داخل

ہوتی ہیں اس طور پر کہ تفاعل قیمت میں غیر متغیر رہتا ہے جب کسی دو اصولوں کو
ایک میں تبدیل کر دیا جاتا ہے۔ مثلاً اصولوں کے وہ تفاعل (اصولوں کا مجموعہ)

(47)

اصولوں میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کا مجموعہ (وغیرہ) جو دفعہ ۲۳ میں بیان ہوئے ہیں اس نوعیت کے تفاعل ہیں کیونکہ اگر ان میں سے کسی جملہ میں مثال کے طور پر عہ کی بجائے عہہ اور عہہ کی بجائے عہہ لکھا جائے تو جملہ کی قیمت غیر متغیر رہتی ہے۔

دفعہ ۲۳ کے تفاعل اصولوں کے سادہ ترین متشاکل تفاعل ہیں کیونکہ انہیں ہر اصل صرف اپنی پہلی قوت میں داخل ہوتی ہے۔ ہم اصولوں کی قیمتوں کو سروں کی رقوم میں معلوم کئے بغیر دفعہ ۲۳ کی ساداتوں (۲) کی مدد سے اصولوں کے مختلف متشاکل تفاعلوں کی قیمتیں سرور کی رقوم میں معلوم کر سکتے ہیں۔ آئندہ کسی باب میں جہیں اس مضمون پر بحث کی جائے گی ہم ثابت کرینگے کہ اصولوں کے کسی منطق متشاکل تفاعل کو سروں کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے۔ یہاں جو مثالیں دی جائیں گی ان میں سے اکثر کعبی اور چاردرجی کی سادہ صورتوں سے متعلق ہونگی اور یہ مثالیں فی الحال اس قسم کے جملوں کو سروں کی رقوم میں معمولی ابتدائی طریقوں سے حاصل کرنے کے لئے کافی ہیں۔ عام طور پر کسی متشاکل تفاعل کو اسکی کسی رقم کے پیچھے علامت \sim لگا کر تعبیر کیا جاتا ہے اور اسکی مدد سے پورا تفاعل لکھا جاسکتا ہے۔ مثلاً اگر کعبی کی اصلیں عہ، عہہ، عہہ ہوں تو \sim عہہ عہہ عہہ سے متشاکل تفاعل

\sim عہہ عہہ عہہ + \sim عہہ عہہ عہہ + \sim عہہ عہہ عہہ
تعبیر ہوگا جس میں دو دو اصولوں سے جتنے حاصل ضرب مل سکتے ہیں ان کو لیا گیا ہے اور ہر ایک کا جدا گانہ مربع لیکر جمع کیا گیا ہے۔ اسی طرح \sim عہہ عہہ سے مجموعہ

\sim عہہ عہہ عہہ + \sim عہہ عہہ عہہ + \sim عہہ عہہ عہہ + \sim عہہ عہہ عہہ
تعبیر ہوگا جس میں دو دو اصولوں کی جتنی ترتیبیں ہو سکتی ہیں لی گئی ہیں اور ہر رقم کی پہلی اصل کا مربع لیا گیا ہے۔
حسب ذیل مثالوں میں مختلف متشاکل تفاعل واقع ہونگے۔ انہی مدد سے طالب علم کو اس قسم کے جملے لکھنے کی مشق ہو جائے گی جب

نمونہ کی ایک قسم دی گئی ہو۔

مثالیں

(48)

۱۔ کبھی مسادات

$$لا + ف + لا + ق + لا + ر =$$

کی اصلوں کے جملہ $ح$ عہدہ کی قیمت معلوم کرو۔
مساداتوں

$$عہ + بہ + جہ = - ف$$

$$بہ + جہ + جہ + عہ = ق$$

کو باہم ضرب دینے سے حاصل ہوگا

$$ح عہدہ + بہ + جہ = - ف ق$$

$$ح عہدہ + بہ = ۳ - ف ق$$

۲۔ اسی کبھی مسادات کی صورت میں

$$عہ + بہ + جہ$$

کی قیمت معلوم کرو۔
جواب :- $ح عہدہ = ف - ۲ ق$

۳۔ اسی کبھی مسادات کی صورت میں

$$عہ + بہ + جہ$$

کی قیمت معلوم کرو۔

$$ح عہدہ اور ح عہدہ کی قیمتوں کو ضرب دینے سے حاصل ہوگا$$

$$عہ + بہ + جہ + ح عہدہ + ح عہدہ = - ۲ ف ق$$

پس مثال ۱ سے

$$ح عہدہ = ۳ - ۲ ف ق - ۳ ر$$

۴۔ اسی کبھی مسادات کی صورت میں

$$بہ + جہ + جہ + عہ + عہ + بہ$$

کی قیمت معلوم کرو۔

ہمیں یہ آسانی حاصل ہوگا

[illegible]

جس سے $3x$ عطا ہوا = ق^۱ - ۲ فر

۵۔ اسی کعبی مساوات کی صورت میں

$$(\bar{a} + \bar{c})(\bar{c} + \bar{b})(\bar{b} + \bar{a})$$

کی قیمت معلوم کرو۔

یہ جملہ ۲۷۰۰۰ + ۳۰۰۰ کے مساوی ہے۔ جواب :- ۱۔ ۲۔ ۳۔ ۴۔ ۵۔ ۶۔ ۷۔ ۸۔ ۹۔ ۱۰۔ ۱۱۔ ۱۲۔ ۱۳۔ ۱۴۔ ۱۵۔ ۱۶۔ ۱۷۔ ۱۸۔ ۱۹۔ ۲۰۔ ۲۱۔ ۲۲۔ ۲۳۔ ۲۴۔ ۲۵۔ ۲۶۔ ۲۷۔ ۲۸۔ ۲۹۔ ۳۰۔ ۳۱۔ ۳۲۔ ۳۳۔ ۳۴۔ ۳۵۔ ۳۶۔ ۳۷۔ ۳۸۔ ۳۹۔ ۴۰۔ ۴۱۔ ۴۲۔ ۴۳۔ ۴۴۔ ۴۵۔ ۴۶۔ ۴۷۔ ۴۸۔ ۴۹۔ ۵۰۔ ۵۱۔ ۵۲۔ ۵۳۔ ۵۴۔ ۵۵۔ ۵۶۔ ۵۷۔ ۵۸۔ ۵۹۔ ۶۰۔ ۶۱۔ ۶۲۔ ۶۳۔ ۶۴۔ ۶۵۔ ۶۶۔ ۶۷۔ ۶۸۔ ۶۹۔ ۷۰۔ ۷۱۔ ۷۲۔ ۷۳۔ ۷۴۔ ۷۵۔ ۷۶۔ ۷۷۔ ۷۸۔ ۷۹۔ ۸۰۔ ۸۱۔ ۸۲۔ ۸۳۔ ۸۴۔ ۸۵۔ ۸۶۔ ۸۷۔ ۸۸۔ ۸۹۔ ۹۰۔ ۹۱۔ ۹۲۔ ۹۳۔ ۹۴۔ ۹۵۔ ۹۶۔ ۹۷۔ ۹۸۔ ۹۹۔ ۱۰۰۔ ۱۰۱۔ ۱۰۲۔ ۱۰۳۔ ۱۰۴۔ ۱۰۵۔ ۱۰۶۔ ۱۰۷۔ ۱۰۸۔ ۱۰۹۔ ۱۱۰۔ ۱۱۱۔ ۱۱۲۔ ۱۱۳۔ ۱۱۴۔ ۱۱۵۔ ۱۱۶۔ ۱۱۷۔ ۱۱۸۔ ۱۱۹۔ ۱۲۰۔ ۱۲۱۔ ۱۲۲۔ ۱۲۳۔ ۱۲۴۔ ۱۲۵۔ ۱۲۶۔ ۱۲۷۔ ۱۲۸۔ ۱۲۹۔ ۱۳۰۔ ۱۳۱۔ ۱۳۲۔ ۱۳۳۔ ۱۳۴۔ ۱۳۵۔ ۱۳۶۔ ۱۳۷۔ ۱۳۸۔ ۱۳۹۔ ۱۴۰۔ ۱۴۱۔ ۱۴۲۔ ۱۴۳۔ ۱۴۴۔ ۱۴۵۔ ۱۴۶۔ ۱۴۷۔ ۱۴۸۔ ۱۴۹۔ ۱۵۰۔ ۱۵۱۔ ۱۵۲۔ ۱۵۳۔ ۱۵۴۔ ۱۵۵۔ ۱۵۶۔ ۱۵۷۔ ۱۵۸۔ ۱۵۹۔ ۱۶۰۔ ۱۶۱۔ ۱۶۲۔ ۱۶۳۔ ۱۶۴۔ ۱۶۵۔ ۱۶۶۔ ۱۶۷۔ ۱۶۸۔ ۱۶۹۔ ۱۷۰۔ ۱۷۱۔ ۱۷۲۔ ۱۷۳۔ ۱۷۴۔ ۱۷۵۔ ۱۷۶۔ ۱۷۷۔ ۱۷۸۔ ۱۷۹۔ ۱۸۰۔ ۱۸۱۔ ۱۸۲۔ ۱۸۳۔ ۱۸۴۔ ۱۸۵۔ ۱۸۶۔ ۱۸۷۔ ۱۸۸۔ ۱۸۹۔ ۱۹۰۔ ۱۹۱۔ ۱۹۲۔ ۱۹۳۔ ۱۹۴۔ ۱۹۵۔ ۱۹۶۔ ۱۹۷۔ ۱۹۸۔ ۱۹۹۔ ۲۰۰۔ ۲۰۱۔ ۲۰۲۔ ۲۰۳۔ ۲۰۴۔ ۲۰۵۔ ۲۰۶۔ ۲۰۷۔ ۲۰۸۔ ۲۰۹۔ ۲۱۰۔ ۲۱۱۔ ۲۱۲۔ ۲۱۳۔ ۲۱۴۔ ۲۱۵۔ ۲۱۶۔ ۲۱۷۔ ۲۱۸۔ ۲۱۹۔ ۲۲۰۔ ۲۲۱۔ ۲۲۲۔ ۲۲۳۔ ۲۲۴۔ ۲۲۵۔ ۲۲۶۔ ۲۲۷۔ ۲۲۸۔ ۲۲۹۔ ۲۳۰۔ ۲۳۱۔ ۲۳۲۔ ۲۳۳۔ ۲۳۴۔ ۲۳۵۔ ۲۳۶۔ ۲۳۷۔ ۲۳۸۔ ۲۳۹۔ ۲۴۰۔ ۲۴۱۔ ۲۴۲۔ ۲۴۳۔ ۲۴۴۔ ۲۴۵۔ ۲۴۶۔ ۲۴۷۔ ۲۴۸۔ ۲۴۹۔ ۲۵۰۔ ۲۵۱۔ ۲۵۲۔ ۲۵۳۔ ۲۵۴۔ ۲۵۵۔ ۲۵۶۔ ۲۵۷۔ ۲۵۸۔ ۲۵۹۔ ۲۶۰۔ ۲۶۱۔ ۲۶۲۔ ۲۶۳۔ ۲۶۴۔ ۲۶۵۔ ۲۶۶۔ ۲۶۷۔ ۲۶۸۔ ۲۶۹۔ ۲۷۰۔ ۲۷۱۔ ۲۷۲۔ ۲۷۳۔ ۲۷۴۔ ۲۷۵۔ ۲۷۶۔ ۲۷۷۔ ۲۷۸۔ ۲۷۹۔ ۲۸۰۔ ۲۸۱۔ ۲۸۲۔ ۲۸۳۔ ۲۸۴۔ ۲۸۵۔ ۲۸۶۔ ۲۸۷۔ ۲۸۸۔ ۲۸۹۔ ۲۹۰۔ ۲۹۱۔ ۲۹۲۔ ۲۹۳۔ ۲۹۴۔ ۲۹۵۔ ۲۹۶۔ ۲۹۷۔ ۲۹۸۔ ۲۹۹۔ ۳۰۰۔ ۳۰۱۔ ۳۰۲۔ ۳۰۳۔ ۳۰۴۔ ۳۰۵۔ ۳۰۶۔ ۳۰۷۔ ۳۰۸۔ ۳۰۹۔ ۳۱۰۔ ۳۱۱۔ ۳۱۲۔ ۳۱۳۔ ۳۱۴۔ ۳۱۵۔ ۳۱۶۔ ۳۱۷۔ ۳۱۸۔ ۳۱۹۔ ۳۲۰۔ ۳۲۱۔ ۳۲۲۔ ۳۲۳۔ ۳۲۴۔ ۳۲۵۔ ۳۲۶۔ ۳۲۷۔ ۳۲۸۔ ۳۲۹۔ ۳۳۰۔ ۳۳۱۔ ۳۳۲۔ ۳۳۳۔ ۳۳۴۔ ۳۳۵۔ ۳۳۶۔ ۳۳۷۔ ۳۳۸۔ ۳۳۹۔ ۳۴۰۔ ۳۴۱۔ ۳۴۲۔ ۳۴۳۔ ۳۴۴۔ ۳۴۵۔ ۳۴۶۔ ۳۴۷۔ ۳۴۸۔ ۳۴۹۔ ۳۵۰۔ ۳۵۱۔ ۳۵۲۔ ۳۵۳۔ ۳۵۴۔ ۳۵۵۔ ۳۵۶۔ ۳۵۷۔ ۳۵۸۔ ۳۵۹۔ ۳۶۰۔ ۳۶۱۔ ۳۶۲۔ ۳۶۳۔ ۳۶۴۔ ۳۶۵۔ ۳۶۶۔ ۳۶۷۔ ۳۶۸۔ ۳۶۹۔ ۳۷۰۔ ۳۷۱۔ ۳۷۲۔ ۳۷۳۔ ۳۷۴۔ ۳۷۵۔ ۳۷۶۔ ۳۷۷۔ ۳۷۸۔ ۳۷۹۔ ۳۸۰۔ ۳۸۱۔ ۳۸۲۔ ۳۸۳۔ ۳۸۴۔ ۳۸۵۔ ۳۸۶۔ ۳۸۷۔ ۳۸۸۔ ۳۸۹۔ ۳۹۰۔ ۳۹۱۔ ۳۹۲۔ ۳۹۳۔ ۳۹۴۔ ۳۹۵۔ ۳۹۶۔ ۳۹۷۔ ۳۹۸۔ ۳۹۹۔ ۴۰۰۔ ۴۰۱۔ ۴۰۲۔ ۴۰۳۔ ۴۰۴۔ ۴۰۵۔ ۴۰۶۔ ۴۰۷۔ ۴۰۸۔ ۴۰۹۔ ۴۱۰۔ ۴۱۱۔ ۴۱۲۔ ۴۱۳۔ ۴۱۴۔ ۴۱۵۔ ۴۱۶۔ ۴۱۷۔ ۴۱۸۔ ۴۱۹۔ ۴۲۰۔ ۴۲۱۔ ۴۲۲۔ ۴۲۳۔ ۴۲۴۔ ۴۲۵۔ ۴۲۶۔ ۴۲۷۔ ۴۲۸۔ ۴۲۹۔ ۴۳۰۔ ۴۳۱۔ ۴۳۲۔ ۴۳۳۔ ۴۳۴۔ ۴۳۵۔ ۴۳۶۔ ۴۳۷۔ ۴۳۸۔ ۴۳۹۔ ۴۴۰۔ ۴۴۱۔ ۴۴۲۔ ۴۴۳۔ ۴۴۴۔ ۴۴۵۔ ۴۴۶۔ ۴۴۷۔ ۴۴۸۔ ۴۴۹۔ ۴۵۰۔ ۴۵۱۔ ۴۵۲۔ ۴۵۳۔ ۴۵۴۔ ۴۵۵۔ ۴۵۶۔ ۴۵۷۔ ۴۵۸۔ ۴۵۹۔ ۴۶۰۔ ۴۶۱۔ ۴۶۲۔ ۴۶۳۔ ۴۶۴۔ ۴۶۵۔ ۴۶۶۔ ۴۶۷۔ ۴۶۸۔ ۴۶۹۔ ۴۷۰۔ ۴۷۱۔ ۴۷۲۔ ۴۷۳۔ ۴۷۴۔ ۴۷۵۔ ۴۷۶۔ ۴۷۷۔ ۴۷۸۔ ۴۷۹۔ ۴۸۰۔ ۴۸۱۔ ۴۸۲۔ ۴۸۳۔ ۴۸۴۔ ۴۸۵۔ ۴۸۶۔ ۴۸۷۔ ۴۸۸۔ ۴۸۹۔ ۴۹۰۔ ۴۹۱۔ ۴۹۲۔ ۴۹۳۔ ۴۹۴۔ ۴۹۵۔ ۴۹۶۔ ۴۹۷۔ ۴۹۸۔ ۴۹۹۔ ۵۰۰۔ ۵۰۱۔ ۵۰۲۔ ۵۰۳۔ ۵۰۴۔ ۵۰۵۔ ۵۰۶۔ ۵۰۷۔ ۵۰۸۔ ۵۰۹۔ ۵۱۰۔ ۵۱۱۔ ۵۱۲۔ ۵۱۳۔ ۵۱۴۔ ۵۱۵۔ ۵۱۶۔ ۵۱۷۔ ۵۱۸۔ ۵۱۹۔ ۵۲۰۔ ۵۲۱۔ ۵۲۲۔ ۵۲۳۔ ۵۲۴۔ ۵۲۵۔ ۵۲۶۔ ۵۲۷۔ ۵۲۸۔ ۵۲۹۔ ۵۳۰۔ ۵۳۱۔ ۵۳۲۔ ۵۳۳۔ ۵۳۴۔ ۵۳

۶۔ چار درجہ مساوات

لَا + ف + لَا + ق + لَا + ر + لَا + س = .

کی اصلوں کے متشاکل تفاعل

ع^٢ب^٢ج^٢ + ع^٢ب^٢ض^٢ + ع^٢ج^٢ض^٢ + ب^٢ع^٢ج^٢ + ب^٢ع^٢ض^٢ + ب^٢ج^٢ض^٢

+ جَاءَهُ بِهِ + جَاءَهُ فَمَهُ + جَاءَهُ بِهِ + فَمَهُ جِهَهُ + فَمَهُ جِهَهُ بِهِ

کی قیمت معلوم کرو۔

ع + ه + ح + ض = ف

$$ع\text{ به ح} + ع\text{ به ض} + ع\text{ به ص} + ب\text{ به ض} = -$$

کو باہم ضرب دینے سے حاصل ہوگا

3 عہد بہ جہ + ۴ عہد بہ جہ فہ = فہ ۱

پس $\frac{3}{2}$ عہدہ جہ = ف - م - س

۷۔ اسی چار درجی مساوات کی صورت میں متشاکل تفاعل

$$ع^۲ + ب^۲ + ج^۲ + ض^۲$$

کی قیمت معلوم کرو۔

۳۔ کامریع لینے سے ہمیں بہ آسانی مائل ہوگا

$$z = f' - f'' - q$$

۸۔ اُسی چار درجہ مساوات کی صورت میں متشاکل تفاعل

ع^١ب^١ + ع^٢ح^٢ + ع^٣ض^٣ + ب^٤ج^٤ + ب^٥ض^٥ + ج^٦ض^٦

کی قیمت معلوم کرو۔

مساوات

$$3 \text{ عہ } 2 = 1 \text{ ق}$$

کا مربع لینے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$3 \text{ عہ } 2 + 2 \text{ عہ } 2 = 1 \text{ ق} + 2 \text{ عہ } 2 = 1 \text{ ق}$$

پس مثال ۶ سے

$$3 \text{ عہ } 2 = 1 \text{ ق} - 2 \text{ ف } 2 + 1 \text{ س}$$

۹۔ اسی چار درجی مساوات کی صورت میں $3 \text{ عہ } 2$ کی قیمت معلوم کرو۔

اس مثال کی تفاعل کو بنانے کے لئے ہم حروف ع، بہ کی دو ترتیبیں

عہ بہ اور بہ عہ لیتے ہیں۔ ان سے $3 \text{ عہ } 2$ کی دو قیمتیں عہ بہ اور بہ عہ حاصل ہوتی ہیں۔

اسی طرح حروف ع، بہ، جہ، ضہ میں سے ہر زوج سے دو دو قیمتیں حاصل ہونگی۔

اس طرح مثال کی تفاعل میں کل بارہ قیمتیں ہونگی۔

مساواتوں

$$3 \text{ عہ } 2 = 1 \text{ ق} - 2 \text{ ف} + 1 \text{ س}$$

کو باہم ضرب دو اور دیکھو کہ

$$3 \text{ عہ } 2 = 1 \text{ ق} - 2 \text{ ف} + 1 \text{ س}$$

[اس آخری مساوات سے جس قسم کے نتیجے تعبیر ہوتے ہیں ان کی تصدیق

اس طرح ہو سکتی ہے کہ مساوات کی طرفین میں رقموں کی تعداد وہی ہونی چاہئے۔

مثلاً موجودہ مثال میں چونکہ $3 \text{ عہ } 2$ میں چار قیمتیں اور $3 \text{ عہ } 2$ میں چھ قیمتیں ہیں ان کے

حاصل ضرب میں ۲۴ قیمتیں ہونی چاہئیں اور یہ درحقیقت $3 \text{ عہ } 2$ کی بارہ قیمتیں

اور $3 \text{ عہ } 2$ بہ جہ کی بارہ قیمتیں ہیں۔]

اس لئے مسئلہ ماضی کے نتیجوں کو استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$3 \text{ عہ } 2 = 1 \text{ ق} - 2 \text{ ف} + 1 \text{ س}$$

۱۰۔ اسی چار درجی مساوات کی صورت میں

$$3 \text{ عہ } 2 = 1 \text{ ق} - 2 \text{ ف} + 1 \text{ س}$$

کی قیمت معلوم کرو۔

$$\begin{aligned} & 3 \text{ ع}^۲ \text{ کا مریج لینے اور حاصل شدہ قیمتوں کو استعمال کرنے سے} \\ & 3 \text{ ع}^۲ = ۲ \text{ ق}^۲ + ۲ \text{ ف}^۲ - ۲ \text{ ف}^۲ \text{ ق} + ۲ \text{ ف}^۲ \text{ ر} - ۲ \text{ ر}^۲ \text{ س} \end{aligned}$$

۱۱۔ مساوات

$$۱ \text{ ل}^۲ + ۱ \text{ ب}^۱ - ۱ \text{ ل}^۲ - ۲ \text{ ب}^۱ + \dots + \text{ب}^۱ \text{ ب}^۱ = ۰$$

کی اصلوں کے مربعوں کے مجموعہ کی قیمت سروں کی رقوم میں معلوم کرو۔
3 ع^۲ کا مریج لینے سے ہمیں یہ آسانی حاصل ہوگا

$$3 \text{ ع}^۲ = 2 \text{ ق}^۲ + 2 \text{ ف}^۲ - 2 \text{ ف}^۲ \text{ ق} - 2 \text{ ف}^۲ \text{ ر} + 2 \text{ ر}^۲ \text{ س}$$

پس

$$3 \text{ ع}^۲ = 2 \text{ ب}^۱ - 2 \text{ ب}^۱ \text{ ب}^۱$$

۱۲۔ شال ماسبق کی مساوات کی اصلوں کے متکافیوں کے مجموعہ کی قیمت سروں کی رقوم میں معلوم کرو۔

دفعہ ۲۳ کی آخری دو مساواتوں سے ہمیں حاصل ہوگا

(50)

$$\text{ع}^۱ \text{ ع}^۱ \dots \text{ع}^۱ + \text{ع}^۱ \text{ ع}^۱ \dots \text{ع}^۱ + \dots + \text{ع}^۱ \text{ ع}^۱ \dots \text{ع}^۱ = ۱$$

$$= (۱ - ۱) \text{ ب}^۱ - ۱$$

$$\text{اور } \text{ع}^۱ \text{ ع}^۱ \dots \text{ع}^۱ = (۱ - ۱) \text{ ب}^۱$$

پہلی مساوات کو دوسری سے تقسیم کریں تو

$$\frac{۱ - \text{ب}^۱}{\text{ب}^۱} = \frac{۱}{\text{ع}^۱} + \dots + \frac{۱}{\text{ع}^۱} + \frac{۱}{\text{ع}^۱}$$

$$\text{یعنی } 3 = \frac{۱}{\text{ع}^۱} - \frac{\text{ب}^۱}{\text{ب}^۱}$$

اسی طرح اصلوں کے متکافیوں میں سے دو دو کے تین تین کے وغیرہ حاصل ضربوں کا مجموعہ آخر سے تیسرے یا آخر سے چوتھے وغیرہ سر کو آخری سر سے

کی قیمت سروں کی رقوم میں معلوم کرو۔

$$\text{چونکہ } ۲\text{عہ} - ۲\text{بہ} - ۳\text{عہ} = (۳\text{عہ} + ۲\text{بہ} + ۳\text{عہ}) + ۳\text{عہ} + \frac{۱}{۲}$$

اسلئے مطلوبہ قیمت متماثلہ مساوات

(51)

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} (۳\text{عہ} + ۲\text{بہ} + ۳\text{عہ}) (۳\text{عہ} + ۲\text{بہ} + ۳\text{عہ})$$

میں لاکھ بجائے۔ $\frac{۱}{۲}$ درج کرنے سے یہ آسانی حاصل ہو سکتی ہے۔

جواب :- $\frac{۱}{۲} (۲\text{عہ} - ۲\text{بہ} - ۳\text{عہ}) (۲\text{عہ} - ۲\text{بہ} - ۳\text{عہ}) \times$

$$(۲\text{عہ} - ۲\text{بہ} - ۳\text{عہ}) = ۲۴ - (۲\text{عہ} - ۲\text{بہ} - ۳\text{عہ}) + ۲۴$$

۱۶۔ چار درجہ مساوات

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۰$$

کے سروں کی رقوم میں اصولوں کے حسب ذیل متماثل تفاعل کی قیمت معلوم کرو:-

$$(۲\text{بہ} - ۲\text{عہ}) + (۳\text{عہ} - ۲\text{بہ}) + (۲\text{عہ} - ۲\text{بہ}) + (۲\text{عہ} - ۲\text{بہ}) + (۲\text{عہ} - ۲\text{بہ})$$

یہاں مساوات بالا میں عددی سروہ ہیں جو چوتھی قوت کے شنائی جملہ کے پھیلاؤ میں واقع ہوتے ہیں۔ زیر بحث متماثل تفاعل

$$۲\text{عہ} - ۲\text{بہ} - ۲\text{عہ} + ۲\text{بہ} + ۱۲\text{عہ} + ۲\text{بہ} + ۲\text{عہ}$$

کے متماثل ہے۔ مثالوں ۶ اور ۸ کے نتیجوں کو استعمال کیا جائے تو

$$\frac{۱}{۲} (۲\text{بہ} - ۲\text{عہ}) + (۳\text{عہ} - ۲\text{بہ}) + (۲\text{عہ} - ۲\text{بہ}) + (۲\text{عہ} - ۲\text{بہ}) + (۲\text{عہ} - ۲\text{بہ})$$

$$= ۲۴ - (۲\text{عہ} - ۲\text{بہ} - ۳\text{عہ}) + ۲۴$$

۱۷۔ مثال ۱۶ کی مساوات کی چار اصولوں میں سے دو دو کے چھ حاصل ضرب

لئے جائیں اور حاصل ضرب میں (مثلاً ۲ بہ میں) بقیہ دو اصولوں کا حاصل ضرب

(یعنی ۲ عہ - ۲ بہ) جمع کیا جائے تو ہمیں تین مجموعے ملینگے

$$۲\text{عہ} + ۲\text{عہ} - ۲\text{بہ} + ۲\text{عہ} - ۲\text{بہ} + ۲\text{عہ} - ۲\text{بہ}$$

اب سروں کی رقوم میں اصولوں کے حسب ذیل دو متماثل تفاعلوں کی

قیمتیں معلوم کرنا مطلوب ہے:-

(جہ + بہ ضہ) (عہ بہ + جہ ضہ) + (عہ بہ + جہ ضہ) (بہ جہ + عہ ضہ)
 + (بہ جہ + عہ ضہ) (جہ عہ + بہ ضہ)
 (بہ جہ + عہ ضہ) (جہ عہ + بہ ضہ) (عہ بہ + جہ ضہ)
 ان میں سے پہلا متذکرہ بانا مجموعوں میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کا مجموعہ
 ہے اور دوسرا تینوں کا مسلسل حاصل ضرب۔ اب چونکہ یہ تینوں تفاعل (متذکرہ بالا
 تین مجموعے) چار درجی مسادات کے نظریہ میں بہت اہمیت رکھتے ہیں اسلئے ہم ان کو
 اختصاراً حروف لہ، مہ، نہ سے تعبیر کریں گے۔ اس لئے ہمیں مہ نہ + نہ لہ + لہ مہ
 اور لہ مہ نہ کی قیمتیں سروں کی رقوم میں معلوم کرنا ہونگی۔
 قبل الذکر متشاکل تفاعل ۳ عہ بہ جہ جس کو بہ آسانی حسب ذیل
 طریقہ سے بیان کیا جاسکتا ہے:-

$$\begin{matrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{matrix} \text{ مہ نہ} = ۴ \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{pmatrix} \text{ لہ مہ}$$

موخر الذکر متشاکل تفاعل ضرب دینے کے بعد

$$\text{عہ بہ جہ ضہ} (\text{عہ}^۲ + \text{بہ}^۲ + \text{جہ}^۲ + \text{ضہ}^۲) + \text{عہ}^۲ \text{بہ جہ ضہ} (\text{عہ}^۲ + \text{بہ}^۲ + \text{جہ}^۲ + \text{ضہ}^۲)$$

کے مساوی ہے اور ہم معمولی عمل حساب کے ذریعہ حاصل کرتے ہیں

$$\begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{pmatrix} \text{ مہ نہ} = ۸ \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{pmatrix} - ۳ \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{pmatrix} + ۲ \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{pmatrix}$$

۱۸۔ مثال ۱۶ کی چار درجی مسادات کے سروں کی رقوم میں اصلوں کے
 حسب ذیل متشاکل تفاعل کی قیمت معلوم کرو:-

$$\left\{ \begin{matrix} \text{جہ} - \text{عہ} \\ \text{بہ} - \text{ضہ} \\ \text{عہ} - \text{بہ} \\ \text{جہ} - \text{ضہ} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \text{عہ} - \text{بہ} \\ \text{بہ} - \text{جہ} \\ \text{جہ} - \text{عہ} \\ \text{عہ} - \text{جہ} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \text{بہ} - \text{عہ} \\ \text{عہ} - \text{بہ} \\ \text{بہ} - \text{جہ} \\ \text{جہ} - \text{عہ} \end{matrix} \right\}$$

یہ تفاعل بھی چار درجی مسادات کے نظریہ میں کافی اہمیت رکھتا ہے۔ اس
 غرض سے کہ اسکے لکھ لینے میں کوئی ابہام پیدا نہ ہو، ہم اس ترقیم کی تشریح کریں گے جو اس کتاب
 میں ہمیشہ استعمال ہوگی۔ یہ ترقیم اسوقت بھی اسی طرح کارآمد ہوگی جب دوسرے
 ایسے تفاعل دئے جائیں جو چار درجی مسادات کی اصلوں کے فرقوں پر مشتمل ہوں۔
 اصلوں عہ، بہ، جہ کو دائری ترتیب میں رکھنے سے ہمیں تین نسرت

یہ۔ جہ۔ عہ۔ عہ۔ یہ ملتے ہیں اور ہر اصل میں سے ضہ کو تفریق کرنے سے
تین دوسرے فرق عہ۔ ضہ۔ یہ۔ ضہ۔ جہ۔ ضہ ملتے ہیں۔ ان میں سے ہم دودو
فرق لیکر انہیں اس طرح مرتب کرتے ہیں :-

(بہ۔ جہ) (عہ۔ ضہ) (جہ۔ عہ) (بہ۔ ضہ) (جہ۔ ضہ)
زیر بحث تفاعل ان تین جملوں کے فرقوں کا حاصل ضرب ہے جبکہ ان فرقوں کو
حسب معمول دائری ترتیب میں لیا گیا ہو۔
اب مثال ماضی میں لہ۔ مہ۔ نہ کی جو قیمتیں دی گئی ہیں انکو استعمال کرتے
ہمیں حاصل ہوگا

$$\begin{aligned} - مہ + نہ &\equiv (بہ - جہ) (عہ - ضہ) - نہ + لہ \equiv (جہ - عہ) (بہ - ضہ) \\ - لہ + مہ &\equiv (عہ - ضہ) (بہ - جہ) (ضہ) \end{aligned}$$

اسلئے ہمیں

$$(۲ لہ - مہ - نہ) (۲ مہ - نہ - لہ) (۲ نہ - لہ - مہ)$$

$$(۳ لہ - ۳ مہ - ۳ نہ) (۳ مہ - ۳ نہ - ۳ لہ) (۳ نہ - ۳ لہ - ۳ مہ)$$

کی قیمت سرود کی رقوم میں معلوم کرنا ہوگی۔
اسکو ضرب دید اور ۳ عہ بہ کی قیمت درج کرو اور مثال ۱۷ کے نتیجوں کو استعمال
کرو تو مطلوبہ جملہ حسب ذیل حاصل ہوگا

$$۱۲ لہ - مہ - نہ) (۲ مہ - نہ - لہ) (۲ نہ - لہ - مہ)$$

$$= -۳۳۲ (۱ لہ + ۱ مہ + ۲ نہ - ۱ لہ - ۱ مہ - ۲ نہ - ۱ لہ - ۱ مہ - ۲ نہ)$$

سرود کا یہ تفاعل اور امثلہ ۱۳، ۱۵، ۱۶ میں حاصل شدہ تفاعل کعبی اور چار
درجی مساداتوں کے نظریہ میں بہت اہمیت رکھتے ہیں۔

۱۹۔ مثال ۱۶ کے چار درجی کے سرود کی رقوم میں متشکل تفاعل

$$(عہ - بہ) + (عہ - جہ) + (عہ - ضہ) + (بہ - جہ) + (بہ - ضہ) + (جہ - ضہ)$$

کی قیمت معلوم کرو۔

اسکو اختصاراً ۳ عہ۔ بہ سے بیان کیا جاسکتا ہے۔

جواب :- لُج (ع - ب) = ۴۸ (ل - ل) (۱ - ۱)

۲۰۔ مثال ۱۶ کے چار درجہ کی صورت میں سروں اور اصولوں کے درمیان حسب ذیل ربط ثابت کرو :-

ل (ب + ج - ع - ض) (ج + ع - ب - ض) (ع + ب - ج - ض)

۳۲ = ۳۲ (ل - ل) (۱ - ۱) (۱ - ۱) (۱ - ۱)

۲۸۔ متشاكل تفاعلوں سے متعلق مسائل - مندرجہ ذیل (53)

دوسرے جن پر ہم اس مضمون کی بحث ختم کرتے ہیں بہت سی مثالوں میں ان نتیجوں کی تصدیق کرنے میں مفید ثابت ہوئے جو متشاكل تفاعلوں کی قیمتوں کو سروں کی رقوم میں محسوب کرنے سے حاصل ہوتے ہیں -

مسئلہ ۱۔ اصولوں کے کسی متشاكل تفاعل کی کسی رقم میں سبب اصولوں کے قوت نماؤں کا مجموعہ سروں کی رقوم میں تفاعل کی متناظر قیمت کی ہر رقم کے لاضوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے -

ظاہر ہے کہ متشاكل تفاعل کی ہر رقم کے لئے قوت نماؤں کا مجموعہ وہی ہوتا ہے - اس مجموعہ کو ہم اس تفاعل کا ”تمام اصولوں کا درجہ“

کہہ سکتے ہیں - اس مسئلہ کی صداقت دفعہ سابق کی مثالوں ۱۳، ۱۵، ۱۶، ۱۷ وغیرہ کی مخصوص صورتوں سے ظاہر ہے - عام صورت میں کسی تصدیق دفعہ ۲۳ کی مساواتوں

(۲) سے ہو سکتی ہے کیونکہ ان مساواتوں میں ہر سر کا لاحقہ اصولوں کے متناظر تفاعل کے ”تمام اصولوں کے درجہ“ کے مساوی ہے - پس سروں کی

کسی قوتوں کے کسی حاصل ضرب میں لاحقوں کا مجموعہ اصولوں کے متناظر تفاعل کے تمام رقموں کے درجہ کے مساوی ہونا چاہئے -

مسئلہ ۲۔ جب کسی مساوات کو ثنائی سروں کے ساتھ لکھا جائے تو اصولوں کے کسی متشاكل تفاعل کے لئے سروں کی رقوم میں ایسا جملہ ملے گا جس میں تمام رقموں کے عددی

اجزائے ضربی کا جبری مجموعہ صفر کے مساوی ہو گا اگر متشاكل تفاعل صرف اصولوں کے قوتوں کا تفاعل ہو -

اس مسئلہ کی صداقت عام مساوات کو ثنائی سروں کے ساتھ لکھ کر تمام

۴ — اسی مساوات کے لئے متشکل تفاعل

$$(بہ - جہ) + (جہ - عہ) + (عہ - بہ)$$

کی قیمت معلوم کرو۔

جہ کا مربع لینے سے جہ ۷ بہ آسانی حاصل ہوتا ہے (دیکھو دفعہ ۲ مثال ۳)

جواب :- ۲۲ - ۱۲ - ۱۲ = ۱۲ - ۱۲ + ۱۲ = ۱۲

- ۱۸ - ۱۲ = ۶

۵ — اسی مساوات کے لئے

$$\frac{بہ + جہ}{بہ + عہ} + \frac{جہ + عہ}{جہ + بہ} + \frac{عہ + بہ}{عہ + جہ}$$

کی قیمت معلوم کرو۔
جواب :- ۲۲ - ۱۲ = ۱۲ - ۱۲ + ۱۲ = ۱۲

۶ — اسی مساوات کے لئے

$$\frac{بہ + جہ}{بہ + عہ} + \frac{جہ + عہ}{جہ + بہ} + \frac{عہ + بہ}{عہ + جہ}$$

کی قیمت معلوم کرو۔
جواب :- ۲۲ - ۱۲ = ۱۲ - ۱۲ + ۱۲ = ۱۲

۷ — اسی مساوات کے لئے

$$\frac{بہ + جہ}{بہ + عہ} + \frac{جہ + عہ}{جہ + بہ} + \frac{عہ + بہ}{عہ + جہ}$$

کی قیمت معلوم کرو۔

جواب :- ۲۲ - ۱۲ = ۱۲ - ۱۲ + ۱۲ = ۱۲

۸ — اسی مساوات کے لئے متشکل تفاعل جہ (عہ - بہ) کی قیمت معلوم کرو۔ (55)

جواب :- ۲۲ - ۱۲ = ۱۲ - ۱۲ + ۱۲ = ۱۲

۱۷ — (عہ + ۲) (بہ + ۲) (جہ + ۲) (ضہ + ۲) کی عددی قیمت معلوم کرو جہاں عہ، بہ، جہ، ضہ مساوات
 $\text{لا} = \text{لا} + ۸ - \text{لا} - ۵ + ۱۰ = ۰$

کی اصلیں ہیں۔

۱۸ — اگر عہ، بہ، جہ، ضہ مساوات

$$\text{لا} + \text{لا} + ۴ + \text{لا} + ۶ + \text{لا} + ۴ + \text{لا} + ۴ = ۰$$

کی اصلیں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{لا} (بہ + جہ) (جہ + عہ) (عہ + بہ) (بہ + ضہ) (ضہ + جہ) (جہ + ضہ) (ضہ + عہ)$$

$$= ۱۶ \{ ۶ + \text{لا} - \text{لا} - \text{لا} - \text{لا} - \text{لا} - \text{لا} - \text{لا} - \text{لا} \}$$

زیر بحث متشکل تفاعل (عہ + نہ) (نہ + لہ) (لہ + مہ) (مہ + جہ) (جہ + ضہ) (ضہ + عہ) کے مساوی ہے جہاں لہ، مہ، نہ کی قیمتیں وہ ہیں جو دفعہ ۲۷ مثال ۷ میں دی گئی تھیں۔

۱۹ — مثال ۹ کی چار درجہ مساوات کی اصلوں کے متشکل تفاعل (عہ + بہ) کی قیمت محسوب کرو۔

جواب :- ۳ ف - ۶ اف + ۲ ق + ۲۰ ق + ۲ ف - ۱۶ ر

۲۰ — ثابت کرو کہ جب چار درجہ کوثری سرور کے ساتھ لکھا جائے جیسا کہ مثال ۱۸ میں لکھا گیا ہے تو مثال ۱۸ کے متشکل تفاعل کی قیمت شکل ذیل میں لکھی جاسکتی ہے:-

$$\text{لا} (عہ + بہ) = ۱۶ \{ ۴ + \text{لا} - \text{لا} - \text{لا} - \text{لا} - \text{لا} - \text{لا} - \text{لا} - \text{لا} \}$$

۲۱ — ایک خط مستقیم نقطوں کے دو زوجوں کے فاصلے ایک ثابت مبداء سے جو اسی خط میں واقع ہے درجہ دوم کی مساواتوں

$$\text{لا} + \text{لا} + \text{ب} + \text{لا} + \text{ج} = ۰, \text{لا} + \text{لا} + \text{ب} + \text{لا} + \text{ج} = ۰$$

کی اصلوں (عہ، بہ) اور (عہ، بہ) کے مساوی ہیں۔ اگر ایک زوج کے نقطے دوسرے زوج کے موسیقی مزدوج نقطے ہوں تو ثابت کرو کہ ذیل کا ربط موجود ہے:-

$$\text{لا} + \text{ج} + \text{لا} + \text{ج} = ۲ \text{ب} + \text{ب} = ۰$$

۲۲ — ایک خط پر کے تین نقطوں (ا، ب، ج) کے فاصلے اسی خط پر کے

ایک ثابت مبداء سے مساوات

$$1\text{ا} + 3\text{ب} + 3\text{ج} + 3\text{د} = 0$$

(57) کی اصلوں کے مساوی ہیں۔ وہ شرط معلوم کرو کہ نقطوں (ا، ب، ج) میں سے ایک نقطہ باقی دو نقطوں کے درمیانی فاصلے کی تقصیف کرے۔
دفعہ ۲ کی مثال ۱۵ سے مقابلہ کرو۔

جواب :- ۱د - ۳ا + ۳ب + ۳ج = ۰

۲۳۔ سوال گذشتہ کی ترقیم کو قائم رکھو اور وہ شرط معلوم کرو کہ نقطوں (ا، ب، ج) میں سے ایک موسیقی تقسیم بنے۔

جواب :- ۱د - ۳ا - ۳ب + ۳ج = ۰

اسکو مثال ۲۲ کے نتیجے سے اخذ کیا جاسکتا ہے اس طور پر کہ اصلوں کو ان کے یککافیوں میں بدل لیا جائے۔ یا اسکو بہ آسانی آزادانہ محسوب کیا جاسکتا ہے۔
۲۴۔ اگر مساوات

$$1\text{ا} + 2\text{ب} + 6\text{ج} + 4\text{د} + 4\text{ع} = 0$$

کی اصلوں ع، پ، ج، ضہ میں ایسا ربط ہو کہ ع - ضہ، ی - ضہ، ج - ضہ سلسلہ موسیقی میں ہیں تو ثابت کرو کہ

$$1\text{ج} + 2\text{ب} + 3\text{د} - 1\text{د} - 2\text{ب} - 3\text{ج} = 0$$

دفعہ ۲ مثال ۱۸ سے مقابلہ کرو۔

۲۵۔ وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں

$$\frac{\text{بہ جہ} + \text{سہ جہ عہ} + \text{سہ عہ بہ} + \text{بہ جہ} + \text{سہ جہ عہ} + \text{سہ عہ بہ}}{\text{عہ} + \text{سہ بہ} + \text{سہ جہ} + \text{سہ بہ} + \text{سہ جہ} + \text{سہ بہ}}$$

ہوں جہاں سہ = ۱ اور عہ، بہ، جہ کبھی مساوات

$$1\text{ا} + 3\text{ب} + 3\text{ج} + 3\text{د} = 0$$

کی اصلیں ہیں۔ جواب :- (۱ج - ۳ا) (۱د - ۳ب) (۱ج - ۳د) = ۰
دفعہ ۲ کی مثالوں ۱۳ اور ۱۴ سے مقابلہ کرو۔

$$۲۶۔ (۲\text{بہ جہ} - \text{جہ عہ} - \text{عہ بہ}) (۲\text{جہ عہ} - \text{عہ بہ} - \text{بہ جہ}) (۲\text{عہ بہ} - \text{بہ جہ} - \text{جہ عہ})$$

کو دو مکعبوں کے حاصل جمع میں لکھو۔ جواب :- (بہ جب + سہ جب عد + سہ عد بہ) + (بہ جب + سہ جب عد + سہ عد بہ) سے مقابلہ کرو۔

دفعہ ۲۶ مثال ۵ سے مقابلہ کرو۔
۲۷ — (لا + ما + ی) + (لا + سہ + ما + سہ ی) + (لا + سہ + ما + سہ ی) + (لا + سہ + ما + سہ ی) کو لا + ما + ی اور لا + ما + ی کی رقوم میں بیان کرو جہاں سہ = ۱۔
جواب :- ۳ (لا + ما + ی) + ۱۸ لا + ما + ی

۲۸ — اگر

(لا + ما + ی - ۳ لا + ما + ی) (لا + ما + ی - ۳ لا + ما + ی)
= لا + ما + ی - ۳ لا + ما + ی
تو لا + ما + ی کو لا + ما + ی، لا + ما + ی، لا + ما + ی کی رقوم میں معلوم کرو۔
دفعہ ۲۶ کی مثال ۴ کا استعمال کرو۔

جواب :- لا + لا + ما + ما + ی - ۳ لا + ما + ی + لا + لا + ما + ما + ی
= لا + لا + ما + ما + ی + لا + لا + ما + ما + ی

۲۹ — (عد + بہ + جب) + (عد بہ جب - (بہ جب + جب عد + عد بہ) کو تین اجزائے ضربی میں تقوید کرو جنہیں سے ہر ایک عد بہ، جب میں دوسرے درجہ کا جملہ ہو۔
جواب :- (عد - بہ جب) (بہ - جب عد) (بہ - جب عد) سے مقابلہ کرو۔
دفعہ ۲۴ مثال ۱۸ سے مقابلہ کرو۔

۳۰ — حسب ذیل جملوں کو مفرد اجزائے ضربی میں تقوید کرو۔

(۱) (بہ - جب) (بہ + جب - ۲ عد) + (جب - عد) (جب + عد - ۲ بہ) + (عد - بہ) (عد + بہ - ۲ جب)
(۲) (بہ - جب) (بہ + جب - ۲ عد) + (جب - عد) (جب + عد - ۲ بہ) + (عد - بہ) (عد + بہ - ۲ جب)
جواب :- (۱) (۲ - عد - بہ - جب) (۲ - جب - بہ - جب - عد) (۲ - جب - بہ - جب - عد)
(۲) (۲ - ۹ - بہ - جب) (۲ - جب - عد) (عد - بہ)

۳۱ — وہ شرط معلوم کرو کہ کبھی مساوات

لا - ف لا + ق لا - ر =

کی اصلوں کا ایک زوج شکل ۱ ± ۱ - ۱ میں ہو۔ ایسی صورت میں اصلوں کو کس طرح

معلوم کیا جاسکتا ہے۔
اگر حقیقی اصل ب ہو تو اصلوں کے مربعوں کا مجموعہ لینے سے بہ آسانی ف^۲-۲ق
= ب^۲ حاصل ہوگا۔ مطلوبہ شرط ہوگی
(ف^۲-۲ق)(ق^۲-۲ف ر)۔ ر = ۰۔

۳۲۔ مسادات

لا^۲، لا + لا^۲، لا^۲ - لا^۲ = ۰۔
کو حل کر جبکی اصلیں مثال ۳۱ میں بیان کردہ شکل کی ہیں۔

جواب: - ۳، ۲، ۱-۲

۳۳۔ وہ شرطیں معلوم کر دو کہ چار درجہ مسادات

لا^۲ - ف لا^۲ + ق لا^۲ - ر لا + س = ۰۔

کی اصلیں شکل ۱ ± ۱-۱، ب ± ۱-۱، آ کی ہوں۔ یہاں سروں کے
درمیان دو شرطیں ہونی چاہئیں کیونکہ اصلوں میں صرف دو مجهول مقادیر شامل ہیں۔
جواب: - ف^۲-۲ق = ۰، ر = ۲-۲ق س = ۰۔

۳۴۔ مسادات

لا^۲ + لا^۲ + لا^۲ - لا^۲ + لا^۲ + ۹۰۰ = ۰۔

کو حل کر جبکی اصلیں مثال ۳۳ میں بیان کردہ شکل کی ہیں۔

جواب: - ۳ ± ۱-۱، ۳ ± ۱-۱، ۵ ± ۱-۱

۳۵۔ اگر مسادات

لا^۲ + ق لا + ر = ۰۔

کی ایک اصل ع + ب ہو تو ثابت کر دو کہ مسادات

لا^۲ + ق لا - ر = ۰۔

کی ایک اصل ۲ ع ہوگی۔

۳۶۔ وہ شرط معلوم کر دو کہ کبھی مسادات

لا^۲ - ف لا^۲ + ق لا + ر = ۰۔

کی دو اصلوں ع، ب میں ربط ع + ب = ۱ = ۰۔ موجود ہو۔

اور
$$ع^۵ + ع^۴ + ع^۳ = ع^۲ + ع^۱ + ع^۰ \quad \{ ع^۲ + ع^۱ + ع^۰ \} ع^۵ = ع^۷ + ع^۶ + ع^۵$$
 مساوات

$$لا + ق لا - ر = ۰$$

کی اصولوں کو $ع^۱$ ، $ع^۲$ ، $ع^۳$ ، $ع^۴$ ، $ع^۵$ ، $ع^۶$ ، $ع^۷$ لینے سے اور متشاکل تفاعلوں $ع^۳$ ، $ع^۴$ ، $ع^۵$ ، $ع^۶$ ، $ع^۷$ کی قیمتوں کو ق اور ر کی رقوم میں محسوب کرنے سے مطلوبہ نتیجے حاصل ہو سکتے ہیں۔ (مساوات بالا میں دوسری رقم غائب ہے کیونکہ اصولوں کا مجموعہ $= ۰$)۔ اس عمل کی توسیع کیجا سکتی ہے اور $ع^۳$ ، $ع^۴$ ، $ع^۵$ ، وغیرہ کے لئے ضوابط معلوم کئے جاسکتے ہیں۔ اسلئے متواتر قوتوں کے مجموعے حاصل ضرب $ع^۱$ ، $ع^۲$ ، $ع^۳$ اور ماضل جمع $ع^۲ + ع^۱ + ع^۰$ کی رقوم میں بیان کئے جاسکتے ہیں۔ انہیں سے پہلا ر کے مساوی اور دوسرا ۲ ($ع^۱ + ع^۰ + ع^۱ + ع^۰ + ع^۱ + ع^۰$) یعنی ۲ ق کے مساوی ہے۔ ان مجموعوں کو طریقہ ذیل پر محسوب کیا جاسکتا ہے:-

مساوات $لا + ق لا - ر = ۰$ اور اس کا مربع، مکعب وغیرہ لے کر حاصل ہونیوالی مساواتوں کی مدد سے اور لا یا لا سے ضرب دینے کے بعد لا کی کسی قوت کو مثلاً لا ق کو متواتر تحویلوں کے ذریعہ شکل $(ا + ب لا + ج لا + د لا)$ میں لایا جاسکتا ہے جہاں $(ا + ب + ج + د)$ ق اور ر کے۔ پھر $ع^۱$ ، $ع^۲$ ، $ع^۳$ کو مندرج کر کے جمع کرتے حاصل ہوگا $ع^۳ = ۳ - (۲ ق ج - ۱)$ ۔

طالب علم مشتق کے طور پر اسی طریقہ سے $ع^۴ = ۴ ق ر - ۶ ق + ۴$ اور $ع^۵ = ۵ ق ر ق - ۱۰ ق ر + ۱۰ ق - ۵$ کو ثابت کر سکتا ہے۔

پو تھاباب

مساواتوں کا استحالة

۲۹۔ مساواتوں کا استحالة۔ بہت سی مثالوں میں کسی مساوات کی اصلوں کی قیمتیں، سروں کی رقوم میں معلوم کئے بغیر ہم اسکو معمولی اندراجات کے ذریعہ یا اصلوں کے متشاکل تفاعلوں کی مدد سے دوسری ایسی مساوات میں تحویل کر سکتے ہیں، جسکی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصلوں کے ساتھ مقررہ روابط رکھتی ہوں۔ اس قسم کے استحالة سے مساوات کی اصلوں وغیرہ پر بحث کرنے میں بڑی مدد ملتی ہے۔ اب ہم اہم ترین ابتدائی استحالوں کی تشریح کریں گے۔

۳۰۔ اصلیں بہ تبدیل علامت۔ ایک مساوات کو دوسری مساوات میں تحویل کرنے کے لئے جسکی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصلوں کے مساوی مگر مختلف علامت ہوں فرض کرو کہ مساوات

$$لا + ب لا - ۱ + ب لا - ۲ + + ب لا - ۱ + ب لا = ۰$$

کی اصلیں عم، عم، عم،، عم، عم ہیں۔ تب ہمیں مساوات متماثلہ ملیگی

کو ایسی مساوات میں تحویل کر دیجی بڑی سے بڑی قوت والی رقم کا سر ایک ہو۔
ہم اصولوں کو ۳ سے ضرب دیتے ہیں۔

$$\text{جواب :- } ۱۰ - ۴ - ۱۲ - ۱۸ - ۲۰ = ۰$$

۲۔ مساوات

$$۱۰ - \frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۳} - ۱ = ۰$$

سے کسری سر دور کرو۔

$$\text{اصولوں کو ۶ سے ضرب دو۔ جواب :- } ۱۰ - ۲ - ۳ - ۱۲ - ۲۰ = ۰$$

۳۔ مساوات

$$۱۰ - \frac{۵}{۴} - ۱۰ + \frac{۴}{۱۸} = ۰$$

سے کسری سر دور کرو۔

ان کسریوں کے نسب ناموں کے اجزائے ضربی پر غور کیا جائے تو معلوم ہو گا کہ
ایکے ذواضعاف اقل سے بہت چھوٹا عدد کسروں کو دور کر نیکے لئے کافی ہے۔ اگر مطلوبہ
ضرب دینے والا عدد م ہو تو تحویل شدہ مساوات لکھی جائیگی

$$۱۰ - م - \frac{۵}{۴} - ۱۰ + \frac{۴}{۲ \times ۳} \times م = ۰$$

اب یہ ظاہر ہے کہ اگر م کو ۶ کے مساوی لیا جائے تو ہر سر صیح عدد بن جائیگا۔
پس صرف ۶ سے ضرب دینا ہو گا۔

$$\text{جواب :- } ۱۰ - ۱۵ - ۱۲ - ۱۸ - ۲۰ = ۰$$

۴۔ مساوات

$$۱۰ + \frac{۳}{۱۰} + ۱۰ + \frac{۱۳}{۲۵} - \frac{۷۷}{۱۰۰} = ۰$$

سے کسری سر دور کرو۔

اس قسم کی مثالوں میں طالب علم کو چاہئے کہ غیر موجود رقموں کو صفر سروں کے
ساتھ مساوات میں داخل کرے۔ مطلوبہ مضارب ۱۰ ہے۔

$$\text{جواب :- } ۱۰ + ۳۰ + ۱۵۲۰ + ۷۷۰ = ۰$$

۵۔ مساوات

$$- \frac{5}{9} = \frac{5}{12} - \frac{2}{9} - \frac{13}{90}$$

سے کسری سر دور کرو۔

جواب :- $-\frac{5}{9} = \frac{5}{12} - \frac{2}{9} - \frac{13}{90}$

۳۲۔ متکافی اصلیں اور متکافی مساواتیں۔ اگر ایک مساوات

دوسری ایسی مساوات میں تحویل کرنا ہو جسکی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصلوں کے متکافی ہوں تو ہم دفعہ ۳۰ کی متماثل میں لا کی بجائے $\frac{1}{a}$ درج کرتے ہیں۔ اس اندراج سے حاصل ہوگا

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \dots + \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \dots + \frac{1}{a^n} \quad (1)$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \dots + \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \dots + \frac{1}{a^n} \quad (2)$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \dots + \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \dots + \frac{1}{a^n} \quad (3)$$

پس اگر دی ہوئی مساوات میں لا کی بجائے $\frac{1}{a}$ درج کیا جائے اور اسکو $\frac{1}{a}$ سے ضرب دیا جائے تو حاصل کثیر الارقام کو صفر کے مساوی رکھنے سے وہ مساوات ملیگی جسکی اصلیں $\frac{1}{a}$ ، $\frac{1}{a^2}$ ، $\frac{1}{a^3}$ ، $\frac{1}{a^4}$ ، $\frac{1}{a^5}$ کے متکافی ہونگی۔

بعض مساواتیں ایسی ہوتی ہیں جنہیں لا کی بجائے اسکا متکافی درج

کرنے سے انہیں کوئی تغیر واقع نہیں ہوتا۔ انکو ہم متکافی مساواتیں کہیں گے۔

ابھی ہم نے جو اوپر ثابت کیا ہے اُس سے ظاہر ہے کہ اس جماعت سے متعلق مساوات شرائط ذیل کو پورا کریں گی۔

$\frac{ب_1}{ب_1} = \frac{ب_2}{ب_2} = \frac{ب_3}{ب_3} = \dots = \frac{ب_n}{ب_n}$ وغیرہ
 انہیں سے آخری شرط سے حاصل ہوگا $\frac{ب_1}{ب_1} = \frac{ب_2}{ب_2} = \dots = \frac{ب_n}{ب_n} = 1$ ۔
 اسلئے متکافی مساواتوں کو دو جماعتوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ ایک جماعت وہ
 جیسے $ب_1 = 1$ اور دوسری وہ جس میں $ب_1 = 1$ ۔
 (۱) پہلی صورت میں ردابطا ہونگے

$ب_1 = 1 = \frac{ب_1}{ب_1} = \frac{ب_2}{ب_2} = \dots = \frac{ب_n}{ب_n}$

ان سے پہلی جماعت کی متکافی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں جنہیں ابتدا اور آخر سے
 لی ہوئی متناظر رقموں کے سر مقدار میں مساوی اور ہم علامت ہونگے۔
 (۲) دوسری صورت میں یعنی جبکہ $ب_1 = 1$ ردابطا ہونگے

$ب_1 = 1 = \frac{ب_1}{ب_1} = \frac{ب_2}{ب_2} = \dots = \frac{ب_n}{ب_n}$ وغیرہ

ان سے دوسری جماعت کی متکافی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں جنہیں ابتدا اور آخر سے
 لی ہوئی متناظر رقموں کے سر مقدار میں مساوی مگر مختلف علامت ہونگے۔
 یہ بات یاد رہے کہ جب اس جماعت کی کسی مساوات کا درجہ جفت ہو مثلاً
 $ن = ۲$ تو ایک شرط ہو جائیگی $ب_1 = 1$ یعنی $ب_1 = 1$ ۔ اس لئے دوسری
 جماعت کی متکافی مساوات میں جبکہ درجہ جفت ہو درمیانی رقم نہیں ہوتی۔

اگر متکافی مساوات کی ایک اصل عد ہو تو $\frac{ب_1}{ب_1}$ بھی اسکی ایک اصل
 ہونی چاہئے کیونکہ یہ استعمال شدہ مساوات کی اصل ہے اور استعمال شدہ مساوات
 دی ہوئی مساوات کے مماثل ہے۔ پس متکافی مساوات کی اصلیں زوجوں
 عد $\frac{ب_1}{ب_1}$ ، $\frac{ب_2}{ب_2}$ وغیرہ میں واقع ہوتی ہیں۔ جب مساوات کا درجہ طاق ہو تو

(84)

ایک اصل ایسی ہونی چاہئے جو خود اپنی متکافی ہو اور مساوات کی شکل سے یہ
نظا ہر ہے کہ - ایا + ا ایسی صورت میں ایک اصل ہوگی جو جب اسکے کہ مساوات
پہلی جماعت سے یا دوسری جماعت سے متعلق ہو۔ دونوں صورتوں میں
ہم معلومہ جزو ضربی (لا + ا یا لا - ا) سے تقسیم کر سکتے ہیں اور عمل تقسیم سے
جفت درجہ کی متکافی مساوات حاصل ہوگی جو پہلی جماعت سے متعلق ہوگی
دوسری جماعت کی جفت درجہ کی مساواتوں میں لا^۲ - ا جزو ضربی ہوگا کیونکہ
مساوات کو شکل

$$لا^۳ - ا + ب لا (لا^۲ - ا) + =$$

میں لکھا جاسکتا ہے۔
لا^۲ - ا سے تقسیم کرنے سے اسکو بھی پہلی جماعت کی جفت درجہ کی
متکافی مساوات میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔ پس تمام متکافی مساواتوں کو
پہلی جماعت کی جفت درجہ کی مساواتوں میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔
اور اسلئے پہلی جماعت کی جفت درجہ کی مساوات کو معیاری مساوات قرار
دیا جاسکتا ہے۔

مثالیں

۱۔ وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات

$$لا^۲ - ۳ لا^۲ + ۷ لا^۲ - ۵ لا - ۲ = ۰$$

کی اصلوں کے متکافی ہوں۔

جواب: لا^۲ - ۵ لا - ۲ = ۰، لا^۲ + ۳ لا - ۱ = ۰

$$۲۔ لا^۳ + \frac{۵}{۹} لا^۲ - \frac{۲۲}{۳} لا + \frac{۲۲}{۳} لا - \frac{۵}{۹} لا - ۱ = ۰$$

کو پہلی جماعت کی جفت درجہ کی مساوات میں تحویل کرو۔

۳۳۔ اصلوں کو بقدر ایک ڈی ہوئی مقدار کے گھٹانا یا بڑھانا۔

اس قسم کے استعمال کیلئے ہم کثیر الارقام ف (لا) کے متغیر لا کو ما + ہ میں بدل دیتے ہیں۔ ما میں محصلہ مساوات کی ہر اصل دی ہوئی لا کی مساوات کی ہر اصل سے چھوٹی یا بڑی ہوگی بموجب اس کے کہ ہر مثبت یا منفی ہو۔ محصلہ مساوات ہوگی (دیکھو دفعہ ۱۰)

$$ف (ہ) + ف (ہ) + ما + \frac{ف (ہ)}{۲۶۱} + =$$

یہاں ہم دیکھتے ہیں کہ مشتق تفاعلوں کو راست محسوب کر کے انہیں دی ہوئی مقدار ہ درج کرنا محنت طلب امر ہے۔ اسلئے ہم اس مساوات کو بنائیکا ایک آسان طریقہ بیان کرتے ہیں جو عملی مقاصد کیلئے زیادہ کار آمد و سہولت بخش ہے۔ فرض کرو کہ مجوزہ مساوات ہے

$$۱. لا + ۱. لا - ۱. لا + ۱. لا - ۱. لا + + ۱. لا - ۱. لا =$$

(65)

اور فرض کرو کہ ما میں تحویل شدہ کثیر الارقام ہے

$$۱. ما + ۱. ما - ۱. ما + ۱. ما - ۱. ما + + ۱. ما - ۱. ما =$$

اب چونکہ ما = لا - ہ اسلئے یہ کثیر الارقام

$$۱. (لا - ہ) + ۱. (لا - ہ) - ۱. (لا - ہ) + + ۱. (لا - ہ) - ۱. (لا - ہ) + ۱. (لا - ہ) =$$

کے مماثل ہے جس سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ اگر دئے ہوئے کثیر الارقام کو لا - ہ سے تقسیم کیا جائے تو باقی لا ہوگا اور خارج قسمت ہوگا

$$۱. (لا - ہ) + ۱. (لا - ہ) - ۱. (لا - ہ) + + ۱. (لا - ہ) - ۱. (لا - ہ) + ۱. (لا - ہ) =$$

اگر اسکو پھر لا - ہ سے تقسیم کیا جائے تو باقی لا - ہ ہوگا اور خارج قسمت ہوگا

$$۱. (لا - ہ) + ۱. (لا - ہ) - ۱. (لا - ہ) + + ۱. (لا - ہ) - ۱. (لا - ہ) + ۱. (لا - ہ) =$$

اس عمل کو جاری رکھ کر ہم معمولی حسابی اعمال کی تکرار سے (جو دفعہ ۸ میں بیان ہوئے ہیں) تحویل شدہ مساوات کے سروں L_1 ، L_2 ، L_3 وغیرہ کی قیمتیں یکے بعد دیگرے معلوم کر سکتے ہیں۔ آخری سروں L_1 ، L_2 کے مساوی ہو گا۔ کسی آئندہ باب میں یہ معلوم ہو گا کہ عددی مساواتوں کو حل کرنے کا بہترین عملی طریقہ صرف اس عمل کی توسیع ہے جو ذیل کی مثالوں میں استعمال کیا گیا ہے۔

مثالیں

۱۔ وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات

$$L_1 - L_2 + L_3 - L_4 + L_5 - L_6 + L_7 - L_8 + L_9 - L_{10} = 11$$

کی اصلوں سے بقدر ۴ کے گھٹی ہوئی ہوں۔

عمل حساب بہترین طریقہ پر ذیل سے ظاہر ہے

| | | | | |
|------|------|-----|-----|---|
| ۱۱ | ۱۴ - | ۷ | ۵ - | ۱ |
| ۲۰ - | ۱۲ | ۴ - | ۴ | |
| ۹ - | ۵ - | ۳ | ۱ - | |
| | ۶۰ | ۱۲ | ۴ | |
| | ۵۵ | ۱۵ | ۳ | |
| | | ۲۸ | ۴ | |
| | | ۴۳ | ۷ | |
| | | | ۴ | |
| | | | ۱۱ | |

یہاں دیکھئے کہ کثیرالارقام کو اول لا۔ ۴ سے تقسیم کیا گیا جس سے باقی

۹ (= ۱۱) اور خارج قیمت لا۔ لا + ۳ لا۔ ۵ حاصل ہوا (دیکھو دفعہ ۸)۔ اسکو پھر لا۔ ۴ سے تقسیم کیا گیا تو باقی ۵۵ (= ۱۱) اور خارج قیمت لا + ۳ لا + ۱۵ حاصل ہوا۔

پھر تقسیم کرنے سے باقی ۴۳ (= ۱۶) اور خارج قسمت ۷ + ۷ اور اس کو تقسیم کرنے سے
 ۱ = ۱۱ اور ۱ = ۱ پس مطلوبہ استقامت مساوات ہے

$$= 9 - 600 + 600 + 600 + 600 + 600$$

۲۔ وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات

$$= 11 + 2V - 3V_2 + 5V_3$$

کی اصلوں سے بقدر ۳ کے گھٹی ہوئی ہوں۔

| | | | | |
|-----------|-----------|-----------|----------|----------|
| 11 | . | 1- | 7 | . |
| 333 | 113 | 39 | 9 | 3 |
| <hr/> 353 | <hr/> 113 | <hr/> 38 | <hr/> 13 | <hr/> 3 |
| | 393 | 93 | 18 | 3 |
| | <hr/> 0.6 | <hr/> 131 | <hr/> 31 | <hr/> 7 |
| | | 123 | 26 | 3 |
| | | <hr/> 3.0 | <hr/> 08 | <hr/> 9 |
| | | | 34 | 3 |
| | | | <hr/> 93 | <hr/> 12 |
| | | | | 10 |

اس لیے استحالة شدہ مساوات ہے

$$= 353 + 15.6 + 13.5 + 19.2 + 15 + 0$$

۳۔ وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں مساوات

$$= r - v_1 + r'v_1 - v_1r$$

کی اصلوں سے بقدر ۲ کے زیادہ ہوں۔

اس عمل میں ضارب صریحاً ۲ ہے۔

جواب :- $63 - 60 + 58 - 55 + 53 - 50 + 48 - 45 + 43 - 40 + 39 = 129$

۴ - مساوات

$$= 2 - 1 + 15 - 4 + 3$$

کی اصلوں کو بقدر ۷ کے بڑھاؤ۔
جواب :- $3-3^2-4^2+4^3+2^2-2^4+6^2+6^3+6^4=0$

۵ — مساوات

$$5^2-5^3-13^2+13^3+12^2-12^3=0$$

کو بقدر ۲۳ کے گھٹاؤ۔

یہاں بہترین یہ ہو گا کہ پہلے اصلوں کو بقدر ۲۰ کے گھٹایا جائے۔ پھر استحالہ شدہ مساوات کی اصلوں کو بقدر ۳ کے گھٹایا جائے۔ اس دوسرے عمل کو ذیل میں واضح کیا گیا ہے جہاں ہر عمل کا اختتام شکستہ خط سے دکھایا گیا ہے۔

(67)

| | | | | |
|-------|------|-----|----|---|
| | ۵ | ۱۳ | ۱۲ | ۷ |
| ۳۴۵۶۰ | ۱۷۴۰ | ۱۰۰ | | |
| ۳۴۵۶۷ | ۱۷۲۸ | ۸۷ | | |
| ۱۹۱۲۲ | ۳۷۴۰ | ۱۰۰ | | |
| ۵۳۶۸۹ | ۵۴۶۸ | ۱۸۷ | | |
| | ۹۰۶ | ۱۰۰ | | |
| | ۶۳۷۴ | ۲۸۷ | | |
| | ۹۵۱ | ۱۵ | | |
| | ۷۳۲۵ | ۳۰۲ | | |
| | | ۱۵ | | |
| | | ۳۱۷ | | |
| | | ۱۵ | | |
| | | ۳۳۲ | | |

جواب :- $5^2-5^3-13^2+13^3+12^2-12^3+6^2+6^3+6^4=0$

۳۴ — رقموں کا اخراج۔ دفعہ گذشتہ کے استحالہ سے ایک فائدہ یہ ہے کہ مساوات سے کسی مخصوص رقم کو خارج کیا جاسکتا ہے۔ ایسا کرنے

۳ — مساوات

$$لا^۱ - لا^۲ - لا^۳ - لا^۴ = ۲ + لا^۳$$

کو ایسی مساوات میں تحویل کرو جس میں تیسری رقم موجود نہ ہو۔
 ہر کے لئے مساوات درجہ دوم ہوگی

$$۶ لا^۲ - ۱۲ لا - ۱۸ = ۰ \text{ جس سے } لا^۲ = ۳ - لا$$

اس لئے دی ہوئی مساوات کو تحویل کر نیکے دو طریقے ہیں۔
 اصولوں کو بقدر ۳ کے گھٹانے سے حاصل ہوگا

$$(۱) لا^۳ + لا^۲ - ۱۱ لا - ۱۹ = ۰$$

اصولوں کو بقدر ایک کے بڑھانے سے حاصل ہوگا

$$(۲) لا^۳ - لا^۲ + ۱۱ لا - ۱۸ = ۰$$

۳۵ — شنائی سر۔ بہت سے جبری افعال میں کثیر الارقام ف (لا)

کو شکل ذیل میں لکھنا سہولت بخش ہوتا ہے:-

$$لا^۱ + لا^۲ + لا^۳ + \dots + \frac{ن(ن-۱)}{۲ \times ۱} لا^{ن-۱} + \dots + \frac{ن(ن-۱)}{۲ \times ۱} لا^۲ + لا^۱$$

$$+ ن لا^{ن-۱} + لا^۱ + لا^۲$$

جس میں ہر رقم کا سر حرفی سر کے علاوہ ایک عددی سر پر مشتمل ہے جو (لا + ۱) کے

کے پھیلاؤ کی متناظر رقم کے سر کے مساوی ہے جب اسے مسئلہ شنائی سے

پھیلا یا جائے۔ اس طریقہ پر لکھی ہوئی مساواتوں کی مثالیں دفعہ ۲ کے

۱۳ دیں اور ۱۶ ویں سوالات میں دی گئی ہیں۔ یہ شکل ایسی ہے جس میں ہر کثیر الارقام

کو فوراً تحویل کیا جاسکتا ہے۔

اب ہم ترقیم ذیل اختیار کرتے ہیں:-

$$ع = لا^۱ + لا^۲ + لا^۳ + \dots + \frac{ن(ن-۱)}{۲ \times ۱} لا^{ن-۱} + \dots + \frac{ن(ن-۱)}{۲ \times ۱} لا^۲ + لا^۱$$

$$+ ن لا^{ن-۱} + لا^۱ + لا^۲$$

یہاں علاحدہ ن کے ساتھ ن ویں درجہ کے کثیر الارقام کو تعبیر کرتا ہے جو شنائی سروں کے ساتھ لکھا گیا ہو۔

(69) اس لئے ن کون-۱-ن-۲ وغیرہ میں بدلنے سے

$$ع_1 = 1 \cdot 1^{1-n} + 1 \cdot 1^{2-n} + \dots + 1 \cdot 1^{n-1} + 1 \cdot 1^n$$

$$ع_2 = 1 \cdot 1^{2-n} + 2 \cdot 1^{3-n} + \dots + (n-1) \cdot 1^{n-1} + n \cdot 1^n$$

.....

$$ع_m = 1 \cdot 1^{m-n} + 2 \cdot 1^{m+1-n} + 3 \cdot 1^{m+2-n} + \dots + m \cdot 1^n$$

$$ع_6 = 1 \cdot 1^{6-n} + 2 \cdot 1^{7-n} + 3 \cdot 1^{8-n} + \dots + 6 \cdot 1^n$$

$$ع_4 = 1 \cdot 1^{4-n} + 2 \cdot 1^{5-n} + 3 \cdot 1^{6-n} + \dots + 4 \cdot 1^n$$

$$ع_3 = 1 \cdot 1^{3-n} + 2 \cdot 1^{4-n} + 3 \cdot 1^{5-n} + \dots + 3 \cdot 1^n$$

شنائی شکل میں رکھنے سے ایک فائدہ یہ ہے کہ مشتق تفاعل کو فوراً لکھا جاسکتا ہے۔ چنانچہ عن کا پہلا مشتق تفاعل صریحاً ہے

$$ن \{ 1 \cdot 1^{1-n} + 1 \cdot 1^{2-n} + \dots + \frac{(1-n)(2-n)}{2 \times 1} 1^{n-2} + \dots + 1 \cdot 1^n \}$$

یعنی ن-۱۔ اس لئے اس طور پر تعبیر شدہ کثیر الارقام کا پہلا مشتق تفاعل کے لاحقہ پراس قانون کو استعمال کر کے لکھا جاسکتا ہے جو دفعہ ۱ میں متغیر کے قوت نما کے لحاظ سے بیان کیا گیا ہے۔ مثلاً ع کا پہلا مشتق تفاعل اس کو ۴ سے ضرب دیکر اس کے لاحقہ کو بقدر ایک کے گھٹانے سے بنایا جاسکتا ہے۔ اس لئے یہ مشتق تفاعل ۴ ع ہے جسکی تصدیق طالب علم آسانی سے کر سکتا ہے۔

اب ہم یہ ثابت کریں گے کہ کثیر الارقام عن یعنی

$$1 \cdot 1^{1-n} + 1 \cdot 1^{2-n} + \dots + \frac{n(1-n)}{2 \times 1} 1^{n-2} + \dots + n \cdot 1^n$$

مثالیں

۱۔ کثیر الارقام

میں لاکھ بجائے $۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰$ درج کرنے سے جو نتیجہ حاصل ہوا اسکو معلوم کر دو۔

جواب: $۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰$

$۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰$

طالب علم کے لئے بہتر یہ ہوگا کہ وہ اس نتیجہ کی تصدیق دفعہ ۳۳ میں بتلا ہوئے حساب کے طریقہ سے کرے جسکو جبری اور نیز عددی مثالوں کی صورت میں استعمال کرنے سے اکثر فائدہ ہوتا ہے۔

۲۔ مساوات

$$۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ = ۱۰۰۰$$

سے دوسری رقم خارج کر دو۔
اس کی اصلوں کو بقدر اس مقدار کے گھٹانا چاہئے جو مساوات

$$۱۰۰ + ۱۰۰ = ۲۰۰$$

سے حاصل ہو یعنی اصلوں کو بقدر $\frac{۱۰۰}{۲}$ کے گھٹانا چاہئے۔

ہر کی اس قیمت کو ۱۰۰ اور ۱۰۰ میں درج کرنے سے مابین حاصل ہونیوالی مساوات ہوگی

$$۱۰۰ + \frac{۱۰۰(۱۰۰ - ۱۰۰)}{۲} + \frac{۱۰۰ - ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰}{۲} = ۱۰۰۰$$

۳۔ وہ شرط معلوم کر دو کہ مساوات عن = کی دوسری اور تیسری رقمیں

ایک ہی اندراج سے خارج ہو سکیں۔

یہاں ۱۰۰ کی ایک ہی قیمت کے لئے ۱۰۰ اور ۱۰۰ دونوں کو معدوم ہونا چاہئے۔ ان سے ۱۰۰ کو ساقط کر دینے سے ہمیں مطلوبہ شرط ملے گی۔

جواب :- $۱۱۱ - ۱۱۱ = ۰$

۴ — مساوات

$$۱۱ + ۱۱ + ۱۱ - ۱۱ = ۱۹$$

سے دوسری رقم خارج کر کے اسکو مل کر دو۔

ایک ہی اندراج سے تیسری رقم بھی خارج ہوگی اور حاصل ہوگا

$$۱۱ - ۱۱ = ۰$$

مطلوبہ اصلیں اس مساوات کی اصلوں میں سے ۲ تفریق کرنے سے حاصل ہونگی۔

(71)

۵ — وہ شرط معلوم کر دو کہ مساوات عن = کی دوسری اور چوتھی رقمیں

ایک ہی اندراج سے خارج ہو سکیں۔

یہاں ۱۱ کی ایک ہی قیمت کے لئے ۱۱ اور ۱۱ دونوں کو معدوم

ہو جانا چاہیئے۔ اسلئے مساواتوں

$$۱۱ + ۱۱ = ۱۱ + ۱۱ + ۱۱ - ۱۱ = ۱۱$$

سے ۱۱ کو ساق کر دیا جائے تو مطلوبہ شرط ہوگی

$$۱۱ - ۱۱ = ۱۱ - ۱۱ + ۱۱ - ۱۱ = ۰$$

نوٹ :- مساوات درجہ چہارم کے سروں کے درمیان جب یہ شرط پوری

ہو تو اسکو مساوات درجہ دوم میں تحویل کیا جاسکتا ہے کیونکہ جب دوسری رقمیں

خارج کر دی جاتی ہے تو محصلہ مساوات ۱۱ میں درجہ دوم کی مساوات ہوگی اور

۱۱ کی قیمتوں سے لاکھ قیمتیں حاصل ہونگی۔

۶ — مساوات

$$۱۱ + ۱۱ + ۱۱ - ۱۱ = ۱۱ - ۱۱ = ۰$$

کی دوسری رقم خارج کر کے اسکو مل کر دو۔

۱۱ میں مساوات ہوگی

$$۱۱ - ۱۱ = ۱۱ - ۱۱ = ۰$$

۷ — اسی طرح مساوات

$$۱۱ + ۱۱ + ۱۱ - ۱۱ = ۱۱ - ۱۱ = ۰$$

$\frac{1}{3}$ (۲عہ - ب - جب) $\frac{1}{3}$ (۲ب - جب - عہ) $\frac{1}{3}$ (۲جہ - عہ - ب) س
 استحالہ شدہ مساوات کے ذریعہ ہم ابتدائی کعبی کی اصولوں کے متشائل تفاعل (73)
 3 (۲عہ - ب - جب) (۲ب - جب - عہ) (۲جہ - عہ - ب)

کی قیمتیں فوراً لکھ سکتے ہیں۔ مؤخر الذکر تفاعل کی قیمت دفعہ ۲، مثال ۱۵ میں
 محصلہ قیمت کے ماثل ہوگی۔

اس سلسلہ میں عام مساوات کے متعلق ہم ایک اہم اصول بیان
 کریں گے۔ وہ یہ ہے کہ اصولوں عہ، ب، جب، ضہ وغیرہ کا کوئی متشائل تفاعل جو
 صرف ان کے فرقوں کا تفاعل ہو ان سروں کے تفاعلوں کی رقوم میں بیان
 کیا جاسکتا ہے جو استحالہ شدہ مساوات میں جس میں دوسری رقوم موجود نہ ہو واقع ہوئے
 ہیں۔ یہ بات ظاہر ہے کیونکہ استحالہ شدہ مساوات کی کوئی دو اصولوں عہ، ب
 کا فرق ابتدائی مساوات کی اصولوں عہ، ب کے فرق کے مساوی ہے اور اصولوں
 عہ، ب، جب، ضہ وغیرہ کا کوئی متشائل تفاعل استحالہ شدہ مساوات کے سروں کی
 رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً کعبی کی صورت میں اصولوں کے تمام متشائل
 تفاعل جن میں صرف اصولوں کے فرق داخل ہوں، گ، ہ، گ کے تفاعلوں کی
 رقوم میں بیان کئے جاسکتے ہیں۔ اس اصول کی مثالیں دفعہ ۲ کی مثالوں میں
 ملینگی۔

۳۷۔ چار درجہ۔ اس صورت میں استحالہ شدہ مساوات دوسری

رقم کے بغیر حسب ذیل ہوگی

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ = ۱۵$$

جہاں ۱ اور ۱۵ کی قیمتیں وہی ہیں جو دفعہ گذشتہ میں دی گئی ہیں اور جہاں

۱ مساوات

اس مساوات کی اصلوں کو! سے ضرب دیا جائے جیسا کہ دفعہ ۳۶ کے کعبی کی صورت میں کیا گیا ہے تو

(۲) ی + ا ه + ی + گ ی + ع - چ =

چار درجی کا جبری حل دریافت کرنے میں اس کی یہ عقل آسانی پیدا کرتی ہے اس میں متغیر وہی ہے جو بعضی کی صورت میں تنہا یعنی $ab + a$ کیونکہ ابتدائی چار درجی تفاعل کو $ab + a$ سے ضرب دیا جائے تو وہ درحقیقت

(۱+۲)۵ + (۱+۲)۴ + (۱+۲)۳ + (۱+۲)۲ + (۱+۲)۱ + (۱+۲)۰ = ۳-ع ۳-هـ

کے مماثل ہوتا ہے۔

ابتدائی چار درجہ مساوات کی اصولوں کے کسی متشاکل تفاعل کو جو صرف ان کے فرقوں سے بنا ہو، ہنگ اور ع کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے۔

اگر ابتدائی مساوات کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ ہوں تو یہ بہ آسانی معلوم کیا جاسکتا ہے کہ استحالہ شدہ مساوات (۱) کی اصلیں ہیں

$$\frac{1}{14}(3\text{ع-پ-ج-ض}) \cdot \frac{1}{14}(3\text{ب-ج-ض-ع}) \cdot \frac{1}{14}(3\text{ج-ض-ع-ب}) \cdot \frac{1}{14}(3\text{ب-ج-ض-ع})$$

انکا مجموعہ = انیس سے دو کے حاصل ضربوں کا مجموعہ = $\frac{6}{1} \times 19$ ان میں سے

تین تین کے حاصل ضربوں کا مجموعہ = $\frac{24}{3}$ ، اور ان سب کے مسلسل (75)

حاصل ضرب کے لئے مساوات ہے

۱) (۳ عم - ۲ ج - ۱ ض) (۳ ج - ۲ ض - ۱ عم) (۳ ج - ۲ ض - ۱ عم) (۳ ج - ۲ ض - ۱ عم)

۲۵۶ = (۲۰۰ - ۴۳)

سروں کا ایک اور تفاعل ہے جو چار درجہ کی بحث میں بہت اہمیت رکھتا ہے اور جسے ہم اب بیان کریں گے۔ یہ وہ تفاعل ہے جس کا ذکر دفعہ ۲، مثال ۱۸ میں ہو چکا ہے یعنی

رکھتا ہے۔

اگر لہ = ا، مہ = ہ، لہ = ب، مہ = اتوا = لا۔ مہ جیسا کہ دفعہ ۳۳ میں فرض کیا گیا تھا۔ لا کو م کی قوم میں حل کریں تو

$$\frac{لا}{لہ} = \frac{مہ}{لہ}$$

(76) اس قیمت کو دی ہوئی مساوات میں لا کی بجائے ج کیا جاسکتا ہے اور اس طرح ما میں ن دیں درجہ کی ایک مساوات حاصل کیجا سکتی ہے۔ فرض کرو کہ ابتدائی مساوات کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ وغیرہ ہیں اور انکے جواب میں استحالہ شدہ مساوات کی اصلیں عہ، بہ، جہ، وغیرہ ہیں تو مساواتوں

$$\frac{عہ}{لہ + عہ} = \frac{بہ}{لہ + مہ} = \frac{جہ}{لہ + مہ} \text{ وغیرہ}$$

سے ربط

$$\frac{عہ - بہ}{(لہ + مہ) - (لہ + مہ)} = \frac{عہ - جہ}{(لہ + مہ) - (لہ + مہ)}$$

یہ آسانی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ علیٰ ہذا اصلوں کے کسی دوسرے زوج کیلئے۔ اگر ہم ابتدائی مساوات کی چار اصلیں اور ان کے جواب میں استحالہ شدہ مساوات کی چار اصلیں لیں تو ربط ملے گا

$$\frac{عہ - بہ}{(عہ - جہ) - (عہ - جہ)} = \frac{عہ - ضہ}{(عہ - جہ) - (عہ - جہ)}$$

پس اگر مجوزہ مساوات کی اصلیں ان فاصلوں کو تعبیر کریں جو ایک خط مستقیم پر کے چند نقطوں اور اسی خط پر کے ایک ثابت میدان کے درمیان ہیں تو استحالہ شدہ مساوات کی اصلیں نقطوں کے ایک متناظر نظام تھے فاصلوں کو تعبیر کریں اور ان دونوں نظاموں میں یہ ربط ہو گا کہ ایک نظام کے کسی چار کی ”غیر موسیقی نسبت“ وہی ہوگی جو دوسرے نظام میں

انکے چار مزدجوں کی ہے۔ اسی خاصیت کی بنا پر ہم اس استحالہ کو ہم رسم استحالہ کہیں گے۔

یہ بات یاد رہے کہ زیر بحث استحالہ جس میں متغیروں لا اور ما میں

۱ لا + ما + ب لا + ج ما + د = ۰ کی شکل کا ربط ہے استحالہ کی عام سے عام شکل ہے جس سے کسی متغیر کی ایک قیمت کے جواب میں دوسرے متغیر کی ایک اور صرف ایک قیمت حاصل ہوتی ہے۔

۳۹۔ متشاکل تفاضلوں کے ذریعہ استحالہ۔ فرض کرو کہ ایک

مساوات کو ایک دوسری مساوات میں تحویل کرنا مطلوب ہے جسکی اصلیں مجوزہ مساوات کی اصلوں کے دئے ہوئے منطق تفاعل ہوں۔ فرض کرو کہ دیا ہوا تفاعل (عہ، بہ، جہ،) ہے جہاں فہ میں تمام اصلیں داخل ہو سکتی ہیں یا اصلوں کی کوئی کسی تعداد۔ ہم اصلوں کے تمام ممکن اجتماع یہ طرز فہ (عہ بہ جہ) فہ (عہ بہ ضہ) وغیرہ بناتے ہیں اور اتحالی شدہ مساوات کو شکل

(۳۷)

میں لکھتے ہیں۔

جب اس ماصل ضرب کو پھیلایا جاتا ہے تو ما کے متواتر سردی ہوئی مساوات کی اصلوں عہ، بہ، جہ، وغیرہ کے متشاکل تفاعل ہونگے اور اسلئے اس مساوات کے سردوں کی رقوم میں بیان ہو سکیں گے۔

مثالیں

۱۔ لا + ف لا + ق لا + ر = ۰ کی اصلیں عہ، بہ، جہ ہیں۔ وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں عہ، بہ، جہ ہوں۔ فرض کرو کہ اتحالی شدہ مساوات ہے

$$ا + ف + ا + ق + م + س = .$$

تب - ف = ع + ہ + ج + ق = ح + ع + ہ - س = ع + ہ + ج
اب دی ہوئی مساوات کی اصلوں کے متشاکل تفسا علوں
ح + ع + ہ + ج + ع + ہ + ج + ع + ہ + ج کو معلوم کرنا ہے - ہم بہ آسانی حاصل کرتے ہیں
ح + ع = ف - ا + ق + ح + ع + ہ = ق - ا + ف + ر + ع + ہ + ج = ر

اسلئے استحالہ شدہ مساوات ہوگی

$$ا - (ف - ا + ق) + ا + (ق - ا + ف) + م - ر = .$$

۲ - اسی صورت میں وہ مساوات معلوم کر دجکی اصلیں ع + ہ + ج + ہ + ج + ہ + ج ہوں

جواب :- ا + (ف - ا + ق + م + ر) + (ق - ا + ف + م + ر) + (ق - ا + ف + م + ر) + م

$$+ ر = .$$

۳ - اگر مساوات

$$ا + ف + ا + ق + لا + ر + لا + س = .$$

کی اصلیں ع + ہ + ج + ہ + ج + ہ + ج ہوں تو ایسی مساوات بناؤ جسکی اصلیں ع + ہ + ج + ہ + ج + ہ + ج ہوں -

فرض کر دو کہ استحالہ شدہ مساوات ہے

$$ا + ف + ا + ق + م + س + م + س = .$$

تب - ف = ع + ہ + ج + ق = ح + ع + ہ - س = ع + ہ + ج + ح + ع + ہ - س

$$س = ع + ہ + ج + ح + ع + ہ - س$$

دفعہ ۲ کی مثالوں ۸، ۷ سے مقابلہ کر دو -

جواب :- ا - (ف - ا + ق) + ا + (ق - ا + ف + م + س) + (ق - ا + ف + م + س) + (ق - ا + ف + م + س) + م

$$+ س = .$$

کی اصلوں کے مربع ہوں۔

جواب :- $a^2 + 15a + 36 = 0$

موخر الذکر مساوات میں ڈیکارٹ کے قانون علامت سے ایک سے زیادہ مثبت اصلیں نہیں ہو سکتیں اس لئے قبل الذکر کی دو اصلیں خیالی ہوں گی۔
۴۔ وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں مساوات

(79)

$a^4 + a^3 + 2a + 3 = 0$

کی اصلوں کے مربع ہوں۔

جواب :- $a^4 + 2a^3 + 5a^2 + 3a - 6 = 0$

ڈیکارٹ کے قانون علامت سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ابتدائی مساوات کی چار اصلیں خیالی ہونی چاہئیں۔

۴۔ مثال کے طریقہ سے دفعہ ۳۹ کی مثالوں ۱ اور ۳ کی تصدیق کرو۔

۵۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں مساوات

$a^4 + b^4 - a^3 - b^3 + \dots + a + b = 0$

کی اصلوں کے مکعب ہوں۔

یہ معلوم رہے کہ مثال ۱ کے عمل میں ہم نے دئے ہوئے تفاعل ف (لا) کو

ف (-لا) سے ضرب دیا ہے۔ ان تفاعلوں میں جو متغیر ہیں وہ اس طرح حاصل کئے گئے ہیں کہ مساوات لا - ۱ = کی دونوں اصلوں سے لا کو ضرب دیا گیا ہے۔ موجودہ

صورت میں ہمیں ف (لا)، ف (سہ لا)، ف (سہ لا) کو باہم ضرب دینا چاہیئے۔

یہاں ان تفاعلوں میں جو متغیر ہیں وہ مساوات لا - ۱ = کی اصلوں سے لا کو

ضرب دینے پر حاصل ہوتے ہیں۔ استحالہ کو ذیل کے طریقہ پر بہ آسانی عمل میں

لایا جاسکتا ہے :-

کثیرالدرجہ ف (لا) کو شکل

$(a^3 + b^3 - a^2 - b^2 + \dots) + (a^2 + b^2 - a - b + \dots) + (a + b - 1) = 0$

میں لکھو جو ہم اختصاراً

ف + لاق + لا^۲س
سے تعبیر کریں گے جہاں 'ف'، 'ق'، 'س' سب کے سب لا کے تفاعل میں۔

اب
ف + لاق + لا^۲س ≡ (لا-عم) (لا-عم)..... (لا-عم) (۱)
اس تماثلہ میں لا کی بجائے یکے بعد دیگرے سہ لا اور سہ لا رکھا جائے تو

ف + سہ لاق + سہ لا^۲س ≡ (سہ لا-عم) (سہ لا-عم).... (سہ لا-عم) (۲)

ف + سہ لاق + سہ لا^۲س ≡ (سہ لا-عم) (سہ لا-عم).... (سہ لا-عم) (۳)
کیونکہ 'ف'، 'ق'، 'س' غیر متغیر رہتے ہیں اسوجہ سے کہ وہ لا کے تفاعل میں۔

اب (۱)، (۲)، (۳) کو باہم ضرب دو اور دفعہ ۲۶ کے تقیوں کو استعمال کرو تو

ف + لاق + لا^۲س + لا^۲س + لا^۲س + لا^۲س ≡ (لا-عم) (لا-عم).... (لا-عم) (۴)

اس تماثلہ کے پہلے رکن میں لا کی قوتیں صرف ۳ کا ضعف میں اسلئے ہم لا^۲س کی بجائے ما درج کر سکتے ہیں جس سے مطلوبہ استمال شدہ مساوات حاصل ہو جائیگی۔

۶۔ وہ مساوات معلوم کرو جس کی اصلیں مساوات

$$لا - لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ + لا^۶ = ۰$$

کی اصلوں کے کعب ہوں۔

جواب :- لا^۶ + لا^۵ + لا^۴ + لا^۳ + لا^۲ + لا + ۱ = ۰

۷۔ مثال ۵ کے طریقے سے دفعہ ۳۹ کی مثال ۲ کی تصدیق کرو۔

۸۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں مساوات

$$لا^۴ + لا^۳ + لا^۲ + لا + ۱ = ۰$$

کی اصلوں کے کعب ہوں۔

جواب :- لا^۴ + لا^۳ + لا^۲ + لا + ۱ = ۰
۹۔ جواب :- لا^۴ + لا^۳ + لا^۲ + لا + ۱ = ۰
۱۰۔ جواب :- لا^۴ + لا^۳ + لا^۲ + لا + ۱ = ۰

۴۱۔ استحالة کی عام صورت۔ استحالة کے عام مسئلے میں ہمیں

ما میں ایک نئی مساوات بنانی ہوگی جس کی اصلیں دی ہوئی مساوات ف (لا) = کی اصولوں کے ساتھ ایک دیا ہوا ربط ف (لا، ما) = رکھیں۔ ایسی صورت میں استحالة شدہ مساوات اس طرح حاصل ہوگی کہ دی ہوئی مساوات میں لا کی وہ قیمت ما کی رقوم میں درج کجائے جو ربط ف (لا، ما) = سے حاصل ہو۔ یا یہ الفاظ دیگر دونوں مساواتوں ف (لا) =، اور ف (لا، ما) = سے لا ساقط کر دیا جائے۔ مثلاً فرض کرو کہ ایسی مساوات بنانا مطلوب ہے جسکی اصلیں مساوات

$$\text{لا} - \text{ف} \text{ لا} + \text{ق} \text{ لا} - \text{ر} =$$

کی اصولوں (عہ، یہ، جہ) میں سے دو اصولوں کے مجموعے ہوں۔

یہاں

$$\text{ما} = \text{یہ} + \text{جہ} = \text{عہ} + \text{یہ} + \text{جہ} - \text{عہ} = \text{ف} - \text{عہ}$$

مساوات ف (لا، ما) =۔ اس صورت میں ما = ف - عہ ہے کیونکہ جب لا قیمت عہ اختیار کرتا ہے تو ما مجوزہ قیمتوں میں سے ایک قیمت اختیار کرتا ہے اور جب لا دوسری قیمتیں یہ اور جہ اختیار کرتا ہے تو ما دوسری مجوزہ قیمتیں اختیار کرتا ہے۔ اس لئے دی ہوئی مساوات میں لا کی بجائے ف - ما درج کرنے سے مطلوبہ استحالة شدہ مساوات حاصل ہو جاتی ہے۔

مثالیں

۱۔ اگر کبھی

$$\text{لا} - \text{ف} \text{ لا} + \text{ق} \text{ لا} - \text{ر} =$$

کی اصلیں عہ، یہ، جہ ہوں تو وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں ہوں

$$\text{یہ} + \text{جہ} + \frac{1}{\text{عہ}}، \text{جہ} + \text{عہ} + \frac{1}{\text{یہ}}، \text{عہ} + \text{یہ} + \frac{1}{\text{جہ}}$$

یہاں

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d} + \frac{1}{e}$$

یعنی دیا ہوا ربط لا ا = ا + ر ہے۔ اس لئے ف (لا) = ۰ میں لا کی بجائے

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}$$

جواب :- ر ا - ق (ا + ر) + ا + ف (ا + ر) - (ا + ر) =

۲۔ اسی کمی کے لئے وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

$$e + b + c + d + a = 1$$

ہوں۔

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}$$

جواب :- ا - ق (ا + ر) + ا + ف (ا + ر) - (ا + ر) = ۰

(81)

۳۔ اسی کمی کے لئے وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}$$

ہوں۔

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}$$

جواب :- (ف - ۲) ف ق + (ا + ر) ا - (ا + ر) =

$$+ (ف - ۲) ف ق + (ا + ر) ا - (ا + ر) = ۰$$

۴۔ اگر کمی

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

کی اصلیں ع، ب، ج، د، ہوں تو ثابت کرو کہ ہم رسم استعمال

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

سے ما میں ایسی مساوات حاصل ہوتی ہے جسکی اصلیں

$$\frac{(بہ - جہ - عہ)}{(بہ - جہ - عہ)} = \frac{(بہ - جہ - عہ)}{(بہ - جہ - عہ)}$$

$$بہ + جہ - عہ = بہ + جہ - عہ = بہ + جہ - عہ$$

ہیں۔

۴۲۔ کبھی کی مربع دار فرقوں کی مساوات = دفعہ سابق

میں ہم نے جس استحالہ کا ذکر کیا ہے اس کو اب ہم ایک اہم مسئلہ یعنی اُس مساوات کے بنانے میں استعمال کریں گے جس کی اصلیں دی ہوئی مساوات کی دو دو اصلوں کے فرقوں کے مربع ہوں۔

پہلے ہم کبھی

$$لا + ق + لا + ر = (۱)$$

کے لئے جس میں دوسری رقم تہو جو نہیں ہے اس قسم کا عمل کریں گے اور ہم جانتے ہیں کہ عام مساوات کو شکل (۱) میں تحول کیا جاسکتا ہے۔ فرض کرو کہ اسکی اصلیں عہ، بہ، جہ ہیں۔ مابین وہ مساوات بنا نا مطلوب ہے جسکی اصلیں

$$(بہ - جہ)، (جہ - عہ)، (عہ - بہ)$$

ہوں۔

یہاں ہم دیکھتے ہیں کہ دفعہ ۳۹ کا طریقہ اس عام مسئلہ کو حل کرنے میں یعنی ایسی مساوات کے بنانے میں جس کی اصلیں دی ہوئی مساوات کی دو دو اصلوں کے فرقوں کے مربع ہوں استعمال کیا جاسکتا ہے کیونکہ جب حامل ضرب

$$\{ (عہ - عہ) \} \{ (عہ - عہ) \} \dots \{ (عہ - عہ) \} \dots$$

معلوم ہو جائے تو مابین متواتر فرقوں کے سر، عہ، عہ، عہ، وغیرہ کے متشائل تفاعل ہونگے اور اسلئے دی ہوئی مساوات کے سرور کی رقوم میں

(82)

بیان ہو سکیں گے۔ لیکن موجودہ مثال میں دفعہ ۴۱ کے طریقہ سے مطلوبہ مساوات زیادہ آسانی سے حاصل ہوتی ہے۔ اس مساوات کو ہم اختصاراً مجوزہ مساوات کی ”مرجع دار فرقوں کی مساوات“ کہیں گے۔ مگر استعمال شدہ مساوات کی اصطلاحوں میں سے کسی ایک کے مساوی رکھنے سے مثلاً $a = (b - c)$ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2}{2} - 2^2 - 2^2 + 2^2 + 2^2 = (2^2 - 2^2) = 0$$

لیکن $عہ + پ + جہ = ۲$ اق 'عہ یہ جہ = ۱
اسلئے دفعہ ام کی مساوات $فہ (لا' ما) = ۰$ ہو جاتی ہے

$$1 = 2q - \lambda^2 + \frac{2}{\lambda}$$

یا
 لآء (ما + اق) لا - ۲۰۰
 دی ہوئی مساوات کو اس میں سے تفریق کیا جائے تو

(ما + ق) لا - ر = . یعنی لا = $\frac{ر}{ما + ق}$

پیس ما میں استخائے مساوات ہوگی

$$(2) \dots\dots\dots = 12 + 24 + 36 + 48 + 60$$

اگر وہ مساوات بنانا مطلوب ہو سکی اسیں کہیں

(۳)..... = ۲ + ۱۱ + ۱۳ - ۵

کی اصلوں (عہد، بیہ) میں سے دو دو کے فرقوں کے مرجع ہوں تو ہم اول دوسری رقم کو خارج کرتے ہیں جس سے مساوات حاصل ہوگی

$$= \frac{g}{r} + 1 \frac{h^3}{r} + 1$$

اور مطلوبہ مساوات وہی ہوگی جو اس مساوات کی مربع دائروں کی مساوات ہے کیونکہ دوسری رقم کو خارج کرنے سے کسی دو اصولوں کا فرق غیر متبدل رہتا ہے۔ اس لئے مؤخر الذکر مساوات میں

$$ق = \frac{۵۳}{۲}، ر = \frac{گ}{۳}$$

رکھنے سے ہم مطلوبہ مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔ چنانچہ مطلوبہ مساوات ہے

(83)

$$لا + \frac{۱۸}{۲} لا + \frac{۸۱}{۳} لا + \frac{۲۷}{۲} (گ + ۴ھ) = ۰ \dots (۳)$$

جکی اصلیں ہیں

(ب - ج) (ج - ع) (ع - ہ) (ہ - ب) مساوات (۳) سے کسروں کو دور کر نیکیے لئے اس کی اصولوں کو بڑا سے ضرب دینا ہوگا جس سے یہ مساوات ہو جائیگی

$$لا + ۱۸ھ لا + ۸۱ھ لا + ۲۷ (گ + ۴ھ) = ۰ \dots (۵)$$

جکی اصلیں ہوں گی

$$لا (ب - ج) (ج - ع) (ع - ہ) (ہ - ب)$$

اسکی مدد سے کبھی (۳) کی اصولوں کا ایک اہم تقاضا عمل یعنی فرقوں کے مربعوں کا حاصل ضرب سروں کی رقوم میں معلوم کیا جاسکتا ہے :-

$$لا (ب - ج) (ج - ع) (ع - ہ) (ہ - ب) = ۲۷ (گ + ۴ھ) \dots (۶)$$

دفعہ ۳ کی تمانکہ سے یہ ظاہر ہے کہ گ + ۴ھ کا ایک جزو ضربی

مساوات (۵) کی ایک اصل منفی ہو تو کبھی (۳) کی دو اصلیں خیالی ہونگی تاکہ انکی فرق کا مربع منفی ہو۔ اور جب مساوات (۵) کی کوئی اصل منفی نہ ہو تو کبھی (۳) کی سب اصلیں حقیقی ہونگی کیونکہ (۳) کی خیالی اصلوں کے ایک زوج سے (۵) کی ایک منفی اصل کا موجود ہونا لازم آتا ہے۔

حسب ذیل صورتوں میں ہم یہ مان لیتے ہیں کہ مساوات (۵) کے سر حقیقی مقادیر ہیں۔ تب چار صورتیں پیدا ہوتی ہیں:-

(۱) اگر $g^2 + 4h^2$ منفی ہو تو کبھی کی سب اصلیں حقیقی

ہونگی۔ کیونکہ اسکو منفی بنانے کے لئے h کو منفی ہونا چاہئے (اور $g^2 + 4h^2$ کے گ)۔ تب مساوات (۵) کی علامتیں یکے بعد دیگرے مثبت اور منفی ہونگی اور اسلئے (دفعہ ۲۰ سے) مساوات (۵) کی کوئی اصل منفی نہیں ہوگی اور اسلئے دے ہوئے کبھی کی تمام اصلیں حقیقی ہونگی۔

(۲) اگر $g^2 + 4h^2$ مثبت ہو تو کبھی کی دو اصلیں خیالی ہونگی۔

کیونکہ اس صورت میں مساوات (۵) کی ایک اصل منفی ہونی چاہئے۔

(۳) اگر $g^2 + 4h^2 = 0$ ۔ تو کبھی کی دو اصلیں مساوی ہونگی۔

کیونکہ ایسی صورت میں مساوات (۵) کی ایک اصل صفر کے مساوی ہوتی ہے۔ اس صورت میں $h = 0$ ۔ اور یہ مان لیا گیا ہے کہ h معدوم نہیں ہوتا۔ اسلئے

ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ممیز (دفعہ ۲۲) کا صفر ہونا وہ شرط ظاہر کرتا ہے جو مساوی اصلوں کے لئے ہے۔

(۴) اگر $g^2 + 4h^2 = 0$ ۔ اور $h = 0$ ۔ تو کبھی کی تینوں اصلیں

مساوی ہونگی۔ کیونکہ ایسی صورت میں مساوات (۵) کی سب اصلیں

سفر کے مساوی ہوتی ہیں۔ یہ مساواتیں شکل

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

میں بھی یہ آسانی بیان کیجا سکتی ہیں اور اسلئے سروں کے درمیان یہ روابط
وہ شرطیں ہیں کہ کبھی ایک کامل مکعب ہو۔

۴۴۔ عام صورت میں فرقوں کی مساوات۔ اب ہم متشکل
تفاضلوں کی مدد سے وہ مساوات بنائیکے عام مسئلہ پر غور کریں گے جس کی اصلیں دی ہوئی
مساوات کی اصلوں کے فرق یا فرقوں کے مربع ہوں۔ فرض کرو کہ مجوزہ
مساوات

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) \dots (x-n)$$

(85) ہے۔ اس میں لا کی بجائے لا + عمر درج کرنے اور رکھنے بعد دیگرے
۱، ۲، ۳،، n قیمتیں دینے سے ہمیں مساواتیں ملیں گی

$$\left\{ \begin{aligned} f(1) &= (1-a)(1-b)(1-c) \dots (1-n) \\ f(2) &= (2-a)(2-b)(2-c) \dots (2-n) \\ &\dots \dots \dots \\ f(n) &= (n-a)(n-b)(n-c) \dots (n-n) \end{aligned} \right.$$

نیز دفعہ ۲ کا پھیلاؤ استعمال کرنے سے اور f(x) = 0 رکھنے سے
ہمیں مساوات ملیں گی

$$\frac{1}{x} f(x) = f(x) + \frac{1}{x} f(x) + \dots + \frac{1}{x} f(x) + \dots + \frac{1}{x} f(x)$$

اس مساوات کی دوسری جانب کے جملہ کو ذ (لا، عم) سے تعبیر کیا جائے اور مثالاً (۱) کو باہم ضرب دیا جائے تو

$$\text{ذ (لا، عم)} \cdot \text{ذ (لا، عم)} \dots \dots \dots \text{ذ (لا، عم)} \cdot \text{ذ (لا، عم)}$$

$$\equiv \{ \text{لا} - (\text{عم} - \text{عم}) \}^2 \{ \text{لا} - (\text{عم} - \text{عم}) \}^2 \dots \dots \dots \{ \text{لا} - (\text{عم} - \text{عم}) \}^2 \{ \text{لا} - (\text{عم} - \text{عم}) \}^2$$

اس لئے فرقوں کی مساوات بنانے کے لئے ہم ن اجزائے ضربی ذ (لا، عم)، ذ (لا، عم) وغیرہ کو باہم ضرب دیکھتے ہیں اور حاصل ضرب میں اصولوں کے جو متشاکل تفاضل واقع ہوتے ہیں انہی بجائے ان کی قیمتیں سروں کی رقوم میں درج کر سکتے ہیں۔ یا ہم دفعہ ۴۲ میں بتائے ہوئے طریقہ کی بموجب متماثل بالا کی بائیں جانب کے $\frac{1}{n}$ (ن - ۱) اجزائے ضربی کا حاصل ضرب بالراست معلوم کر سکتے ہیں اور پھر متشاکل تفاضل کو انہی بجائے ان کی قیمتیں سروں کی رقوم میں درج کر سکتے ہیں۔ لائیں ن (ن - ۱) دیں درجہ کی حاصل ہونے والی مساوات کی اصولوں میں سے دو اصلیں مساوی مگر مختلف علامت ہونگی۔ اب چونکہ اس مساوات میں لا کی صرف جفت قوتیں واقع ہوتی ہیں اس لئے لا کی بجائے ما درج کیا جاسکتا ہے اور اس طرح $\frac{1}{n}$ (ن - ۱) دیں درجہ کی وہ مساوات حاصل ہوسکتی ہے جسکی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصلوں کے فرقوں کے مربع ہوں۔

تیسرے درجہ سے اعلیٰ تر مساواتوں کے لئے فرقوں کی مساوات کا بنانا دشوار ہو جاتا ہے۔ ہم کسی آئندہ باب میں درجہ چہارم کی عام جبری مساوات کی صورت میں فرقوں کی مساوات معلوم کریں گے۔

مثالیں

۱۔ مساوات

$$۰ = ۶ - لا + ۱۱ لا - ۶$$

کی اصلیں ع، یہ، جہ ہیں۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

$$ب^۲ + ج^۲، ج^۲ + ع^۲، ع^۲ + ہ^۲$$

ہوں -

$$\text{جواب :- } م^۲ - ۲۸ + ۱۲۳۵ - ۲۵۰ = ۰$$

۲- کعبی

$$لا^۲ + ۲ لا + ۳ لا + ۱ = ۰$$

کی اصلیں ع، ہ، جہ ہیں۔ وہ مسادات بناؤ جس کی اصلیں

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴}، \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵}، \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶}، \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۷}$$

ہوں -

$$\text{جواب :- } م^۲ + ۱۲ - ۱۲۷ + ۲۰۷۲ = ۰$$

۳- کعبی

$$لا^۲ + ق + لا + ر = ۰$$

کی اصلیں ع، ہ، جہ ہیں۔ وہ مسادات بناؤ جس کی اصلیں

$$ب^۲ + ج^۲ + ج^۲ + ع^۲، ج^۲ + ع^۲ + ع^۲ + ہ^۲، ج^۲ + ہ^۲ + ہ^۲ + ع^۲$$

ہوں -

$$\text{جواب :- } (م + ق) = ۰$$

۴- کعبی

$$لا^۲ + ف + لا + ق + ر = ۰$$

کی اصلیں ع، ہ، جہ ہیں۔ وہ مسادات بناؤ جس کی اصلیں

$$ب^۲ + ج^۲ - ع^۲، ج^۲ + ع^۲ - ہ^۲، ع^۲ + ہ^۲ - ج^۲$$

ہوں -

$$\text{جواب :- } م^۲ - (ف + ق) م - (ف + ق) + (ف + ق) = ۰$$

$$+ (ف + ق) - (ف + ق) + (ف + ق) = ۰$$

۵- اگر کعبی

۳- (۱+۱+۱) لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا = ۲۲
 کی اصلیں عہ، یہ، جہ ہوں تو ثابت کرو کہ (بہ-جہ) (عہ-جہ) (عہ-بہ) کا
 ایک منطق تفاعل ہے۔

جواب :- (۱+۱+۱) ۹ ±

۶- کبھی

لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا = ۳۳
 کے گ اور ہ کے درمیان ربط معلوم کرو اگر اس کی اصلیں عہ، یہ، جہ ایسی ہوں
 کہ (بہ-جہ) (جہ-عہ) (عہ-بہ) سلسلہ حسابیہ میں ہیں۔
 جواب :- گ + ۲ھ = ۰

۷- اگر

$$ج\ لا - ۲ج\ لا + لا - ۱ = ۰$$

کی اصلیں عہ، یہ، جہ، ضہ ہوں تو

$$(بہ-جہ) (جہ-عہ) (عہ-بہ) + (جہ-عہ) (عہ-بہ) (بہ-جہ) + (عہ-بہ) (بہ-جہ) (جہ-عہ) = ۰$$

جواب :- صفر

کی قیمت معلوم کرو۔

۸- اگر

$$بہ + جہ + جہ + عہ + عہ + ضہ + بہ + ضہ = ۰$$

تو ثابت کرو کہ

$$\{ (بہ-جہ) (جہ-عہ) (عہ-بہ) + (جہ-عہ) (عہ-بہ) (بہ-جہ) + (عہ-بہ) (بہ-جہ) (جہ-عہ) \}$$

$$= ۱۸ \{ (بہ-جہ) (جہ-عہ) (عہ-بہ) + (جہ-عہ) (عہ-بہ) (بہ-جہ) + (عہ-بہ) (بہ-جہ) (جہ-عہ) \}$$

۹- مساوات

$$لا - لا + لا - لا + لا - لا + لا - لا = ۱۵$$

کو مل کر جس کی ایک اصل غلط + عہ مل - آ کی ہے۔

اصلوں کو بقدر ا کے گھاؤ۔ لا کی بجائے عہ مل - آ درج کرو۔ عہ کو

مساداتیں عہ - ۳ عہ - ۲ = اور عہ - ۶ عہ + ۸ = پوری کرنی چاہئیں۔ پس عہ = ۲ ±
اس لئے ایک چیز ضروری لاء - ۲ لاء + ۵ ہے اور دوسرے اجزا (لا + ۱) اور (لا - ۳) ہیں
۱۰۔ کبھی

۱ لاء + ۳ لاء + ۳ لاء + ۱ لاء =
کی اصلیں عہ، یہ، جہ ہیں۔ وہ مسادات بناؤ جس کی اصلیں
بہ + جہ، جہ + عہ، عہ + بہ

ہوں۔

اس مسادات کو دفعہ ۴ میں حل کر دیا گیا ہے۔ ہم یہاں دو مراحل درج کرتے
ہیں جو اگرچہ اس خاص مثال میں آسان ترین نہیں ہے لیکن بہت سی مثالوں میں
کارآمد ثابت ہوگا۔ فرض کرو کہ دی ہوئی مسادات کی اصلوں کو بقدر ہ کے
گھٹایا گیا ہے تو احتمال شدہ مسادات ہوگی (دفعہ ۳۵)

$$۱ لاء + ۳ لاء + ۳ لاء + ۱ لاء =$$

جسکی اصلیں عہ - ۳، بہ - ۶، جہ - ۸ ہیں۔ اب ہم وہ شرط معلوم کریں گے کہ
اس مسادات کی دو اصلیں مساوی مگر مختلف علامت ہوں۔ یہ شرط ہے
(دیکھو دفعہ ۲۴ مثال ۱)

$$۹ لاء - ۱ لاء - ۱ لاء =$$

یہ مسادات ہ میں ایک کبھی ہے جس کی اصلیں

$$\frac{۱}{۳} (بہ + جہ)، \frac{۱}{۳} (جہ + عہ)، \frac{۱}{۳} (عہ + بہ)$$

ہیں کیونکہ شرط بالآ ہے

$$۰ = (ہ - ۳) + (جہ - ۸)$$

یعنی

$$۲ ہ = بہ + جہ$$

جہاں بہ اور جہ سے دی ہوئی مسادات کی کوئی دو اصلیں تعبیر ہوتی ہیں۔ ہ
کے لئے جو مسادات حاصل ہوئی ہے اس کی اصلوں کو ۲ سے ضرب دیکر مطلوبہ

کبھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔

۱۱۔ چار درجی

$$۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ = ۰$$

کی اصلیں عہ، یہ، جہ، ضہ ہیں۔ چہ درجی مساوات بناؤ جسکی اصلیں

$$بہ + جہ + عہ + عہ + یہ + ضہ + ضہ + جہ + ضہ$$

ہوں۔

مثال ۱۰۔ کا طریقہ استعمال کرنے سے مطلوبہ مساوات دفعہ ۲۴ مثال ۲۰

کی شرط سے حاصل کیا جاسکتی ہے۔

اس صورت میں شرط ہوگی

$$۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ + ۱۰۰ = ۰$$

یہ مساوات ۱۰۰ میں چہ درجی ہے جس کی اصلیں $\frac{۱}{۲}$ (بہ + جہ) وغیرہ

ہیں جس سے مطلوبہ مساوات گزشتہ مثال کی طرح حاصل کیا جاسکتی ہے۔

۱۲۔ مثال ۱۰ کے کبھی کی صورت میں وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

(۸۸)

$$\frac{بہ + جہ - عہ}{بہ + جہ - عہ} = \frac{۱۰۰ + ۱۰۰ - ۱۰۰}{۱۰۰ + ۱۰۰ - ۱۰۰}$$

ہوں۔

اصلوں کو بقدر ۱۰۰ کے گھٹاؤ اور وہ شرط معلوم کرو کہ حاصل ہونے والے

کبھی کی اصلیں سلسلہ ہندسیہ میں ہوں (دفعہ ۲۴ مثال ۱۸)۔ یہ شرط ہوگی

$$۱۰۰ + ۱۰۰ - ۱۰۰ = ۰$$

یہ مساوات ۱۰۰ میں تیسرے درجہ کی مساوات میں تحویل ہوگی جس کی اصلیں

مندرجہ بالا قیمتیں ہونگی کیونکہ

$$(عہ - عہ) = (بہ - عہ) (جہ - عہ) یعنی ۱۰۰ = \frac{۱۰۰ + ۱۰۰ - ۱۰۰}{بہ + جہ - عہ}$$

۱۳۔ اسی کعبی کی صورت میں ایسی مسادات بناؤ جس کی اصلیں

$$\begin{array}{r} ۲ \text{ بہ جبہ} - \text{عہ بہ} - \text{عہ} \quad ۲ \text{ جہ عہ} - \text{بہ جبہ} - \text{بہ عہ} \quad ۲ \text{ عہ بہ} - \text{جہ عہ} - \text{جہ بہ} \\ \hline \text{بہ} + \text{جہ} - ۲ \text{ عہ} \quad \text{جہ} + \text{عہ} - ۲ \text{ بہ} \quad \text{عہ} + \text{بہ} - ۲ \text{ جہ} \end{array}$$

ہوں۔

اصولوں کو بقدر $\frac{1}{2}$ کے گھٹاؤ اور وہ شرط معلوم کرو کہ متبادل کعبی کی اصلیں
سلسلہ موسیقیہ میں ہوں (دیکھو دفعہ ۲۴ مثال ۱۹)۔

$$\frac{1}{\text{جہ} - \text{عہ}} + \frac{1}{\text{بہ} - \text{عہ}} = \frac{2}{\text{عہ} - \text{عہ}}$$

$$\frac{2 \text{ بہ جبہ} - \text{عہ بہ} - \text{عہ جبہ}}{\text{بہ} + \text{جہ} - ۲ \text{ عہ}} = \text{عہ}$$

عہ میں مسادات ہے

$$۱ \text{ لہ} - ۳ \text{ لہ} ۱ \text{ لہ} ۲ \text{ لہ} ۲ \text{ لہ} = ۰$$

جہ ایک کعبی میں تحویل ہو جائیگی۔

۱۴۔ چار درجی

$$۱ \text{ لہ} + ۲ \text{ لہ} ۱ \text{ لہ} + ۳ \text{ لہ} ۲ \text{ لہ} + ۴ \text{ لہ} ۱ \text{ لہ} + ۵ \text{ لہ} = ۰$$

کی اصلیں عہ، بہ، جہ، عہ ہیں۔ وہ کعبی معلوم کرو جس کی اصلیں

$$\begin{array}{r} ۲ \text{ جہ} - \text{عہ} - \text{عہ} \quad ۲ \text{ جہ عہ} - \text{بہ جبہ} - \text{بہ عہ} \quad ۲ \text{ عہ بہ} - \text{جہ عہ} - \text{جہ بہ} \\ \hline \text{بہ} + \text{جہ} - \text{عہ} - \text{عہ} \quad \text{جہ} + \text{عہ} - \text{بہ} - \text{عہ} \quad \text{عہ} + \text{بہ} - \text{جہ} - \text{عہ} \end{array}$$

ہوں۔

اصولوں کو بقدر $\frac{1}{2}$ کے گھٹاؤ اور دفعہ ۲۴ مثال ۲۲ کی شرط استعمال کرو۔
اس صورت میں یہ شرط ہے

$$۱ \text{ لہ} - ۱ \text{ لہ} = ۰$$

ل ع + م به ج به ' ل به + م ج به ع ' ل ج به م ع به :

ہوں۔

جواب :- مآ - مق ما + (ل مق + سل م) ما
+ ل م - ل مق - ل م مق - م م =

۱۹۔ اگر کعبی

$$= 1 + \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4$$

کی اصلیں عامہ، چہ ہوں تو وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

(ع - ب) (ع - ج) ، (ب - ج) (ب - ع) ، (ج - ع) (ج - ب)

ہموں۔

جواب :- $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

۲۰۔ مثال ۱۹ کے کعبے کے لئے وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

(ب-ج) (۲ع-ب-ج) (۱ع) (۲ع-ج-ب) (۲ع-ب) (۲ع-ج-ب)

ہوں۔

دفعہ ۴۲ کے کبھی (۴) کی مربع دار فرقوں کی مساوات بنانے سے مطلوبہ مساوات حاصل کجا سکتی ہے کیونکہ

$$(ج-ع-ع-ع) = (ع-ع-ع-ع) - (ع-ع-ع-ج)$$

۲۱۔ مثال ۱۶ کے معنی کی صورت میں وہ مساوات بناؤ جسکی صلیبیں

عہ (یہ - جہ) ^۲، بہ (جہ - عہ) ^۲، جہ (عہ - بہ) ^۲

ہوں۔

فرض کرو کہ استخوانہ مساوات $لا + ف + لا + ق + لا + س = .$ ہے۔

جواب :- ف = ف - ق - ۹ ، ق = ق - ۲ - ۹ ، ف - ق = ۲ ، ۲۴

ب. ف. ر. = ر. (م ق ۳ + ۲ ر + ۴ ف ر - ف ا ق ۱ - ا ف ق ۲)

۲۲۔ اسی کعبی کی صورت میں وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

ع^۱ + ۲ به ج^۱ به ۲ + ۲ ج^۲ به ع^۱ ج^۲ + ۲ ع^۲ به

جواب :- ف۔ ف۔ 'ف' ق۔ ق (۲ ف۔ ۳ ق)

ہمیں۔

$$-k = m f^3 r - \frac{1}{2} q^2 r + \frac{1}{2} q^2 r^2 + \frac{1}{2} q^2 r^3$$

پانچواں باب

متکافی اور شنائی مساواتوں کا حل

۴۵۔ متکافی مساواتیں۔ دفعہ ۳۲ میں یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ

تمام متکافی مساواتوں کو ایک معیاری شکل میں تحويل کیا جاسکتا ہے جس کا درجہ جفت ہو اور ابتدا اور آخر سے شمار کی ہوئی نہیں مساوی اور ہم علامت ہوں۔ اب ہم یہ ثابت کریں گے کہ معیاری شکل کی متکافی مساوات کو دوسری ایسی مساوات میں بدلا جاسکتا ہے جس کا درجہ دی ہوئی مساوات کے درجہ کا نصف ہو۔

مساوات

$$x^{2m} + a_1 x^{2m-2} + a_2 x^{2m-4} + \dots + a_{m-1} x^2 + a_m = 0$$

پر غور کرو۔ اس کو x^m سے تقسیم کر کے ابتدا اور آخر سے مساوی الفصل رقموں کو ملانے سے

$$x^m + \left(\frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^4} + \dots + \frac{a_{m-1}}{x^{2m-2}} + \frac{a_m}{x^{2m}}\right) = 0$$

فرض کرو کہ $x^m = y$ اور یہ کہ $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \dots + \frac{1}{x^{2m-2}} + \frac{1}{x^{2m}}$ اختصاراً y سے تعبیر ہوتا ہے تو صریحاً رابطہ حاصل ہوتا ہے

۲۔ مساوات

$$= 1 - \cancel{V_3} + \cancel{V_5} - \cancel{V_5} + \cancel{V_3} - \cancel{V_1}$$

۱۔ اے تقسیم کرو جبکو اختصاراً یوں کیا جاسکتا ہے :-

$$\begin{array}{r} 1 - 25 - 5 - 1 \\ 1 - 2 - 2 - 1 \\ \hline 1 - 2 - 2 - 1 \end{array}$$

تو ہمیں نہ کافی مساوات ملتی ہے

$$(1) \dots\dots\dots = 1 + {}^r_1 r - {}^r_2 r^2 + {}^r_3 r^3 - \hat{y}$$

$$= r + \left(\frac{1}{r} + \frac{r}{y} \right) r - \left(\frac{1}{r} + \frac{r}{y} \right) \quad \underline{\quad}$$

وہ کی بجائے $1-2$ اور وہ کی بجائے $2-1$ درج کرنے سے

م۱ - ۶ م۱ + ۹ = یعنی (م۱ - ۳) =

جس سے $u = 3$ اور $v = \pm 3$

يعني $\sqrt{p-} = \frac{1}{\sqrt{p}} + \nu$, $\sqrt{p+} = \frac{1}{\sqrt{p}} + \nu$

اور ان مسالواتوں کی اصلیں ہیں

$$\frac{\overline{1-h} \pm \overline{r_h}}{r} \quad \frac{\overline{1-h} \pm \overline{r_h}}{r}$$

یہ اصلیں مساوات (۱) کی دوہری اصلیں ہیں۔

۳ - مساوات

$$\cdot = 1 - \frac{1}{2}$$

کو عمل کرو۔

اسکو لا۔ اسے تقسیم کیا جاے تو

$$= 1 + U + U^2 + U^3 + U^4$$

جس سے حاصل ہوتا ہے

$$۰ = ۱ - ی + ی^۲$$

اس مساوات کو حل کرنے سے

$$۰ = ۱ + لا + \frac{1}{۲} (۵م + ۱)$$

$$۰ = ۱ + لا + \frac{1}{۲} (۵م - ۱)$$

اور پھر ان مساواتوں سے

$$لا = \frac{1}{۲} \{ -۱ + ط۵م \pm (۱۰ + ۲ط۵م) \sqrt{۱ - م} \}$$

جہاں ط۵ = ۱

اس جگہ سے لا کی چار قیمتیں ملتی ہیں۔

$$۳ - لا + ۱ = ۰$$

کے دو درجی اجزائے ضربی معلوم کرو۔

اس کو مستحیل کرنے سے

$$۰ = ی^۳ - ۳ی$$

اس لئے ی = ۰ اور ی = ۳م ±

اس لئے دی ہوئی مساوات کے دو درجی اجزائے ضربی ہیں

$$۰ = ۱ + لا، لا \pm لا۳م + ۱ = ۰$$

۵ - مساواتوں

$$(۱) (۱ + لا) = (۱ + لا) ، (۲) (۱ + لا) = (۱ + لا)$$

کو حل کرو۔

$$۶ - ۲ = \frac{(۱ - لا)}{لا - ۱} + \frac{(۱ + لا)}{لا + ۱}$$

کو ایسی مساوات میں تحویل کرو جو ی میں چوتھے درجہ کی ہو۔

$$جواب :- (۱ - ی) ی + (۳ + ی) ی - (۳ + ی) ی = ۰$$

۴۶۔ ثنائی مساواتیں۔ عام خواص۔

ثنائی مساواتوں کے اہم خواص اس دفعہ اور دفعات آئندہ میں ثابت کئے جائیں گے۔

سئلہ ۱۔ اگر $\lambda = 1$ کی ایک خیالی اصل ϵ ہو تو ϵ بھی ایک اصل ہوگی جہاں m کوئی صحیح عدد ہے۔
چونکہ ϵ ایک اصل ہے اسلئے

$$\epsilon^n = 1 \text{ اور اسلئے } (\epsilon^n) = 1 \text{ یعنی } (\epsilon^n) = 1$$

یعنی $\lambda = 1$ کی ایک اصل ϵ ہے۔
یہ بات مساوات $\lambda + 1 = 0$ کی صورت میں بھی درست ہے بشرطیکہ m طاق عدد ہو۔

۴۷۔ اگر صحیح عدد m اور n ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہوں تو مساواتوں $\lambda^n = 1$ ، $\lambda^m = 1$ میں کوئی اصل سوائے اکائی کے مشترک نہیں ہو سکتی۔

اس کو ثابت کرنے کے لئے ہم صحیح عددوں کی حسب ذیل خاصیت استعمال کرتے ہیں:-

اگر صحیح عدد m اور n ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہوں تو صحیح عدد d اور b معلوم کئے جاسکتے ہیں ایسے کہ $m = n \cdot d + b$ ۔
کیونکہ فی الحقیقت جب $\frac{m}{n}$ کو ایک کسر مسلسل کی شکل میں لکھا جاتا ہے تو $\frac{1}{n}$ یہ

تقرب ہے جو کسر $\frac{1}{2}$ کے تقریبوں میں قابل آخر واقع ہوتا ہے۔
اب اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ دی ہوئی مساواتوں کی کوئی مشترک اصل عد

ہے۔ تب

$$ع^1 = 1 \text{ اور } ع^2 = 1$$

$$\text{اسلئے} \quad ع^1 = 1 \text{ اور } ع^2 = 1$$

جس سے $ع^1 = 1$ یعنی $ع^1 = 1$ یا $ع^2 = 1$
یعنی دی ہوئی مساواتوں کی مشترک اصل صرف ۱ ہے۔

۴۸۔ مسئلہ ۳۔ اگر دو صحیح عددوں m اور n کا مقسوم علیہ اعظم k ہو تو مساواتوں $لا - ۱ = ۱$ اور $لا - ۱ = ۱$ کے درمیان مشترک اصلیں مساوات $لا - ۱ = ۱$ کی اصلیں ہونگی۔

اس کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ

$$m = k \cdot m' \text{ اور } n = k \cdot n'$$

اب چونکہ m' اور n' ایسے عدد ہیں جو ایک دوسرے کے لحاظ سے منفرد ہیں اسلئے ایسے صحیح عدد b اور d معلوم کئے جاسکتے ہیں کہ

$$m' - b = 1 \text{ اور } n' - d = 1$$

$$m - b = 1 \text{ اور } n - d = 1$$

اسلئے اگر $لا - ۱ = ۱$ اور $لا - ۱ = ۱$ کی ایک مشترک اصل عد ہو تو

$$ع^1 = 1 \text{ یعنی } ع^1 = 1$$

جس کے یہ معنی ہیں کہ مساوات $لا - ۱ = ۱$ کی ایک اصل عد ہے۔

۴۹۔ مسئلہ ۴۔ اگر n ایک مفرد عدد ہو اور $\lambda - 1 = 0$ کی کوئی خیالی اصل ϵ ہو تو تمام اصلیں سلسلہ $\epsilon^1, \epsilon^2, \dots, \epsilon^{n-1}$ میں شامل ہیں۔

کیونکہ مسئلہ (۱) سے یہ تمام مقادیر ϵ دی ہوئی مساوات کی اصلیں ہیں اور یہ سب مختلف بھی ہیں کیونکہ اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ ان میں سے کوئی دو اصلیں مساوی ہیں یعنی $\epsilon^i = \epsilon^j$ تو

$$\epsilon^i - \epsilon^j = 0$$

لیکن مسئلہ ۲ سے یہ ناممکن ہے کیونکہ n بالضرور $(\epsilon^i - \epsilon^j)$ کے لحاظ سے j سے کم ہے مفرد ہے۔

۵۰۔ مسئلہ ۵۔ اگر صحیح عدد n کے اجزائے ضربی f, q ، وغیرہ صحیح عدد ہوں تو مساواتوں $\lambda^f - 1 = 0$ ، $\lambda^q - 1 = 0$ ، وغیرہ کی اصلیں مساوات $\lambda^f - 1 = 0$ کو پورا کریں گی۔

مساوات $\lambda^f - 1 = 0$ کی ایک اصل ϵ پر غور کرو تو $\epsilon^f = 1$ جس سے

$$(\epsilon^f)^q = 1 \quad \text{یعنی} \quad \epsilon^{fq} = 1 = 0$$

اس لئے مسئلہ ثابت ہے۔

۵۱۔ مسئلہ ۶۔ اگر عدد مرکب n کے اجزائے ضربی f, q ، وغیرہ مفرد عدد ہوں تو مساوات $\lambda^f - 1 = 0$ کی اصلیں حاصل ضرب

$$(1 + \epsilon + \epsilon^2 + \dots + \epsilon^{f-1})(1 + \epsilon^q + \epsilon^{2q} + \dots + \epsilon^{(q-1)q})(1 + \epsilon^{f^2} + \epsilon^{2f^2} + \dots + \epsilon^{(f-1)f^2}) \dots$$

کی ن رقیں ہونگی جہاں لا۔ ا۔ کی ایک اصل عہ ہے لا۔ ا۔ کی ایک اصل یہ، وغیرہ۔

ہم اسکوئین اجزائے ضربی ف، ق، ر کے لئے ثابت کرتے ہیں۔ عام صورت میں اسی قسم کا ثبوت دیا جاسکتا ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ حاصل ضرب کی کوئی رقم مثلاً عہ پ جہ مساوات لا۔ ا۔ کی ایک اصل ہے کیونکہ عہ = ا،

پہ = ا، جہ = ا اور اسلئے (عہ پ جہ) = ا۔ اسکے علاوہ حاصل ضرب کی کوئی دو رقیں مساوی نہیں ہو سکتیں کیونکہ اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ عہ پ جہ، دوسری رقم عہ پ جہ کے مساوی ہے تو عہ = پ۔ پ۔ جہ۔ جہ۔

اس مساوات کا پہلا رکن مساوات لا۔ ا۔ کی اصل ہے اور دوسرا رکن مساوات لا۔ ا۔ کی اصل ہے۔ اب ان دو مساواتوں میں کوئی اصل مشترک نہیں ہو سکتی کیونکہ ف اور ق ر ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہیں (مسئلہ ۲)۔

پس عہ پ جہ، عہ پ جہ کے مساوی نہیں ہو سکتا۔

۵۲۔ مسئلہ ۷۔ اگر ن = ف ق ر اور ن کے مفرد اجزاء

ضربی ف، ق، ر ہوں تو مساوات لا۔ ا۔ کی اسلیں شکل

عہ بہ جہ کے مشابہ ن حاصل ضربوں کے مساوی ہونگی جہاں

لا۔ ا۔ کی ایک اصل عہ ہے، لا۔ ا۔ کی ایک اصل بہ، لا۔ ا۔ کی

ایک اصل جہ۔

یہ مسئلہ ۶ کی توسیع ہے جس میں ن کے مفرد اجزاء ایک سے زیادہ مرتبہ ن میں واقع ہوتے ہیں۔ اس کا ثبوت ثبوت بالا کے بالکل مشابہ

ہے۔ چنانچہ $a = b$ جیسا کوئی حاصل ضرب ایک اصل کے مساوی ہوگا کیونکہ $a = b$ ، $a = 1$ ، $b = 1$ اور $1 = 1$ ، $1 = 1$ اور $1 = 1$ کا ایک ضعیف ن ہے دفعہ ۱۵ کے مثال ثبوت سے یہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ اس قسم کے کوئی دو صلفز مساوی نہیں ہو سکتے کیونکہ $a = b$ ، $a = 1$ ، $b = 1$ اور $1 = 1$ کے لحاظ سے مفرد ہیں۔ سہولت کی خاطر ہم نے اس مسئلہ کو ن کے صرف تین اجزائے ضربی کے لئے بیان کیا ہے۔ عام صورت میں بالکل اسی قسم کا ثبوت دیا جاسکتا ہے اس مسئلہ اور گزشتہ مسئلوں کی مدد سے اب ہم حسب ذیل عام نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں:-

اکائی کے ن ویں جذروں کو متعین کرنیکا سوال اس صورت میں تحویل ہوتا ہے جس میں n مفرد عدد ہو یا مفرد عدد کسی قوت پر اٹھایا ہوا۔

(۹۵)

۵۳۔ لا۔ ۱۔ کی خاص اصلیں۔ شکل لا۔ ۱۔ کی ہر مساوات کی چند این اصلیں ہوتی ہیں جو اسی شکل کی مگر کمتر درجہ کی مساوات کی اصلیں نہیں ہوتیں۔ اس قسم کی اصلوں کو ہم اس مساوات کی خاص اصلیں یا اکائی کے خاص n ویں جذر کہیں گے۔ اگر n مفرد عدد ہو تو تمام خیالی اصلیں اس قسم کی اصلیں ہوں گی۔ اگر $n = 2$ جہاں n مفرد عدد ہے تو n سے کمتر درجہ کی کوئی n ویں اصل مساوات لا۔ ۱۔ کی اصل ہونی چاہئے۔ کیونکہ n کا کوئی مقسوم علیہ n کا بھی مقسوم علیہ ہے (سوائے خود n کے)۔ پس n (۱۔ ۱) اصلیں ایسی ہوں گی جو n سے کمتر درجہ کی کسی مساوات کی اصلیں نہیں ہوں گی یعنی خاص اصلوں کی تعداد

ف^۱ (۱-۱) ہے۔ پھر اگر $n = f^1 q + r$ جہاں r اور q ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہیں تو $f^1 (1-q)$ اور $f^1 (1-q)$ اصلیں علی الترتیب مساواتوں $la = 1$ اور $la = 1$ کی خاص اصلیں ہونگی۔ اب اگر ان مساواتوں کی کوئی دو خاص اصلیں e اور b ہوں تو مساوات $la = 1$ کی ایک خاص اصل e یہ ہوگی کیونکہ اگر ایسا نہ ہو تو فرض کرو کہ $(e, b) = 1$ جہاں $m > n$ ۔ پس $e = b^m$ لیکن e مساوات $la = 1$ کی ایک اصل ہے اور b^m مساوات $la = 1$ کی ایک اصل ہے۔ مگر ان مساواتوں میں سوائے اکائی کے کوئی اصل مشترک نہیں ہو سکتی کیونکہ ان کے درجے ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہیں۔ اس لئے یہ نتیجہ نکلا کہ m, n سے چھوٹا نہیں ہو سکتا اور e, b مساوات $la = 1$ کی خاص اصل ہے۔ نیز چونکہ ایسے حامل ضربوں تعداد

$$f^1 (1-q) + f^1 (1-q) = f^1 (1-q) \text{ یعنی } n (1-q) + (1-q) = f^1 (1-q)$$

ہے اسلئے اتنی ہی تعداد خاص n ویں اصلوں کی ہوگی۔ اس ثبوت کو بغیر مشکل کے n کی کسی شکل پر منطبق کیا جاسکتا ہے۔

لا۔ ۱ = ۱۔ کی سب اصلیں سلسلہ $1, e, e^2, e^3, \dots, e^{n-1}$

میں شامل ہیں جہاں e کوئی خاص n ویں اصل ہے۔ کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ e, e^2 وغیرہ اصلیں ہیں۔ نیز ان میں سے کوئی دو اصلیں مساوی نہیں کیونکہ اگر $e^2 = e$ تو $e = 1$ اور اسلئے e خاص اصل نہیں ہے اس وجہ سے کہ $f - q = n$ سے چھوٹا ہے۔

اگر ایک خاص n واں جذر e دیا جائے تو ہم a کا n کے باقی تمام خاص n دیں جذر معلوم کر سکتے ہیں۔

چونکہ e خاص جذر ہے اسلئے $a^1, a^2, a^3, \dots, a^{n-1}$ مختلف n

(98)

ویں جذر ہیں جیسا کہ ہم نے ابھی ثابت کیا۔ اب اگر اسی سلسلہ کا ایک جذر e لیا جائے جہاں f, n کے لحاظ سے مفرد ہے تو جذر

$e^2, e^4, \dots, e^{2^{n-1}}$ (ن-۱) f, n کے e

سب مختلف ہیں کیونکہ e کی قوتوں کو جب n سے تقسیم کیا جاتا ہے تو ہر صورت میں باقی مختلف ہوتے ہیں یعنی عددوں کا سلسلہ $1, 2, 3, \dots, n-1$ کسی ترتیب میں۔ پس جذروں کا یہ سلسلہ وہی ہے جو قبل ازیں لکھا جا چکا ہے سو اے اسلئے کہ یہاں ہمیں دوسری ترتیب میں داخل ہوئی ہیں۔ ہر عدد f کے جواب میں جو n کے لحاظ سے مفرد اور اس سے چھوٹا ہو a کا ایک خاص n واں جذر ہے کیونکہ e^m ایک کے مساوی نہیں ہو سکتا جبکہ m, n سے چھوٹا ہو، اگر ایسا ہو سکتا تو سلسلہ میں دو اصلیں ایک کے مساوی ہوتیں اور ایسی صورت میں سلسلہ سے تمام اصلیں حاصل نہ ہو سکتیں۔ اسلئے کسی ثنائی مساوات کی جس کا درجہ n سے کم ہو e اصل نہیں ہو سکتی یعنی e a کا n خاص n واں جذر ہے۔ یہ بات متذکرہ بالا ثابت شدہ نتیجہ کے مطابق ہے کیونکہ n سے چھوٹے اور اس کے لحاظ سے مفرد

صحیح عددوں کی تعداد عددوں کی ایک معلومہ خاصیت سے n (۱) $(\frac{1}{n})$ (۱-۱) $(\frac{1}{n})$

ہے جبکہ $n = f^2$ اور اتنی ہی تعداد مساوات لا۔ ۱ = ۱۔ کی خاص

اصلوں کی ہے جیسا کہ اوپر ثابت کیا گیا۔

مثالیں

۱۔ لا۔ ۱ = ۰ کی خاص اصلیں متعین کرو۔

یہاں $۳ \times ۲ = ۶$ اسلئے مساواتوں لا۔ ۱ = ۰، لا۔ ۲ = ۰ کی اصلیں مساوات لا۔ ۱ = ۰ کی اصلیں ہیں۔ اب لا۔ ۱ کو لا۔ ۱ سے تقسیم کرنے سے لا۔ ۱ حاصل ہوتا ہے اور لا۔ ۲ کو $\frac{۱ - لا۔ ۱}{۱ - لا۔ ۱}$ یعنی لا۔ ۱ سے تقسیم کرنے سے لا۔ لا۔ ۱ حاصل ہوتا ہے۔ اسلئے لا۔ لا۔ ۱ = ۰ سے لا۔ ۱ = ۰ کی خاص اصلیں متعین ہونگی۔ اس مساوات درجہ دوم کو حل کرنے سے

$$\frac{۳ - لا۔ ۱ - ۱}{۲} = ۱ \text{، } \frac{۳ - لا۔ ۱ + ۱}{۲} = ۰$$

نیز چونکہ $۱ = ۰$ ، $۱ = ۰$ ، $۱ = ۰$

اس لئے $۱ = ۰$ ، $۱ = ۰$

جسکی تصدیق یہ آسانی ہو سکتی ہے۔

اس لئے خاص اصلیں ہیں

$$۱ = ۰ \text{، } ۱ = ۰ \text{، } ۱ = ۰ \text{، } ۱ = ۰$$

۲۔ لا۔ ۱ = ۰ کی خاص اصلوں پر بحث کرو۔

(97)

چونکہ ۱۲ کے مفرد اجزائے ضربی ۲ اور ۳ ہیں اور $\frac{۱۲}{۲} = ۶$ ، $\frac{۱۲}{۳} = ۴$

اسلئے لا۔ ۱ = ۰، اور لا۔ ۱ = ۰ کی اصلیں لا۔ ۱ = ۰ کی اصلیں ہیں۔ اب لا۔ ۱ = ۰

کو لا۔ ۱ اور لا۔ ۱ سے تقسیم کیا جائے اور خارج قسمتوں کو صفر کے مساوی رکھا جائے

تو ہمیں دو مساواتیں لا۔ لا۔ ۱ = ۰، اور لا۔ لا۔ ۱ = ۰ حاصل ہونگی اور یہ دونوں مساواتیں

لا۔ لا۔ ۱ = ۰ کی اصلوں سے پوری ہونی چاہئیں۔ اس لئے لا۔ لا۔ ۱ = ۰ اور لا۔ لا۔ ۱ = ۰

کا مقسوم علیہ اعظم لیکر اس کو صفر کے مساوی رکھنے سے مساوات لا۔ لا۔ ۱ = ۰،

کی اصلیں خاص اصلیں ہونگی۔

یہی نتیجہ حاصل ہوتا اگر ہم لا۔ لا۔ ۱ اور لا۔ لا۔ ۱ کے ذواضعاف اقل سے لا۔ لا۔ کو

اس باب میں ثابت کیا ہے۔ لا^۱۔ ۱ = کی سب اصلیں اسکی چار خاص اصولوں عد^۱ عد^۲ عد^۳ میں سے کسی ایک کی قوتوں سے حسب ذیل حاصل ہو سکتی ہیں:-

$$\begin{aligned} & \text{عد}^1 \text{ عد}^2 \text{ عد}^3 \text{ عد}^4 \text{ عد}^5 \text{ عد}^6 \text{ عد}^7 \text{ عد}^8 \text{ عد}^9 \text{ عد}^{10} \text{ عد}^{11} \text{ عد}^{12} \text{ عد}^{13} \text{ عد}^{14} \text{ عد}^{15} \text{ عد}^{16} \text{ عد}^{17} \text{ عد}^{18} \text{ عد}^{19} \text{ عد}^{20} \\ & \text{عد}^1 \text{ عد}^2 \text{ عد}^3 \text{ عد}^4 \text{ عد}^5 \text{ عد}^6 \text{ عد}^7 \text{ عد}^8 \text{ عد}^9 \text{ عد}^{10} \text{ عد}^{11} \text{ عد}^{12} \text{ عد}^{13} \text{ عد}^{14} \text{ عد}^{15} \text{ عد}^{16} \text{ عد}^{17} \text{ عد}^{18} \text{ عد}^{19} \text{ عد}^{20} \\ & \text{عد}^1 \text{ عد}^2 \text{ عد}^3 \text{ عد}^4 \text{ عد}^5 \text{ عد}^6 \text{ عد}^7 \text{ عد}^8 \text{ عد}^9 \text{ عد}^{10} \text{ عد}^{11} \text{ عد}^{12} \text{ عد}^{13} \text{ عد}^{14} \text{ عد}^{15} \text{ عد}^{16} \text{ عد}^{17} \text{ عد}^{18} \text{ عد}^{19} \text{ عد}^{20} \\ & \text{عد}^1 \text{ عد}^2 \text{ عد}^3 \text{ عد}^4 \text{ عد}^5 \text{ عد}^6 \text{ عد}^7 \text{ عد}^8 \text{ عد}^9 \text{ عد}^{10} \text{ عد}^{11} \text{ عد}^{12} \text{ عد}^{13} \text{ عد}^{14} \text{ عد}^{15} \text{ عد}^{16} \text{ عد}^{17} \text{ عد}^{18} \text{ عد}^{19} \text{ عد}^{20} \end{aligned}$$

۳۔ ثابت کرو کہ لا^۱۔ ۱ = کی خاص اصلیں مساوات

$$\text{لا}^1 - \text{لا}^2 + \text{لا}^3 - \text{لا}^4 + \text{لا}^5 - \text{لا}^6 + \text{لا}^7 - \text{لا}^8 + \text{لا}^9 - \text{لا}^{10} + \text{لا}^{11} - \text{لا}^{12} + \text{لا}^{13} - \text{لا}^{14} + \text{لا}^{15} - \text{لا}^{16} + \text{لا}^{17} - \text{لا}^{18} + \text{لا}^{19} - \text{لا}^{20} = 0$$

(98)

کی اصلیں ہیں۔

۴۔ ثابت کرو کہ مثال مابقی کی آٹھ اصلیں مساوات لا^۱ + لا^۲ + لا^۳ = ۰ کی دو

اصولوں کو مساوات

$$\text{لا}^1 + \text{لا}^2 + \text{لا}^3 + \text{لا}^4 + \text{لا}^5 + \text{لا}^6 + \text{لا}^7 + \text{لا}^8 + \text{لا}^9 + \text{لا}^{10} + \text{لا}^{11} + \text{لا}^{12} + \text{لا}^{13} + \text{لا}^{14} + \text{لا}^{15} + \text{لا}^{16} + \text{لا}^{17} + \text{لا}^{18} + \text{لا}^{19} + \text{لا}^{20} = 0$$

کی چار اصولوں سے ضرب دینے سے حاصل ہو سکتی ہیں۔

۵۔ بارہویں درجہ کی مساوات بناؤ جس کی اصلیں لا^۱۔ ۱ = کی خاص اصلیں ہوں اور اسکو چھٹے درجہ کی مساوات میں تحویل کرو۔

$$\text{جواب :- لا}^1 - \text{لا}^2 + \text{لا}^3 - \text{لا}^4 + \text{لا}^5 - \text{لا}^6 + \text{لا}^7 - \text{لا}^8 + \text{لا}^9 - \text{لا}^{10} + \text{لا}^{11} - \text{لا}^{12} + \text{لا}^{13} - \text{لا}^{14} + \text{لا}^{15} - \text{لا}^{16} + \text{لا}^{17} - \text{لا}^{18} + \text{لا}^{19} - \text{لا}^{20} = 0$$

۵۴۔ ثنائی مساواتوں کو دائری تفاعلوں کے ذریعہ حل کرنا۔

ہم عام سے عام ثنائی مساوات

$$\text{لا}^1 = ۱ + \text{ب} - \text{ا}$$

لیتے ہیں جہاں ۱ اور ب حقیقی مقداریں ہیں۔

$$\text{فرض کرو کہ } ۱ = \text{ا} \text{ کا حجم عد}^1 \text{ ب} = \text{ا} \text{ کا جب عد}$$

$$\text{تو } \text{لا}^1 = \text{ا} \text{ کا (جیم عد}^1 + \text{ا} - \text{ا} \text{ جب عد)}$$

$$\text{اب اگر } \text{ر} \text{ (جیم طہ} + \text{ا} - \text{ا} \text{ جب طہ)}$$

اس مساوات کی ایک اصل ہو تو ڈیمو امز کے مسئلہ سے

$$r^2 = (جم ن طه + ا - ا جب ن طه) = کا (جم عه + ا - ا جب عه)$$

$$\text{اور اسلئے} \quad r^2 = جم ن طه = کا جم عه$$

$$r^2 = جب ن طه = کا جب عه$$

ان کا مربع لیکر جمع کرنے سے

$$r^2 = r^2 \text{ یعنی } r = r$$

جہاں ہم r اور r دونوں کو مثبت لیتے ہیں کیونکہ زیر بحث جملوں میں اس جزو ضربی کو ہمیشہ مثبت لیا جاسکتا ہے جس میں زاویہ واقع ہوتا ہے۔ پس

$$جم ن طه = جم عه، جب ن طه = جب عه$$

اور اس لئے

جہاں k کوئی صحیح عدد ہے۔ پس مفروضہ n ویں اصل کی عام شکل ہوگی

$$n \text{ ک } (جم عه + ا - ا جب ن طه + ا - ا جب ن طه) = (جم عه + ا - ا جب ن طه + ا - ا جب ن طه)$$

اس جملہ میں k کو عددوں کے سلسلہ ∞ اور ∞ کے درمیان کوئی n متضلع قیمتیں دینے سے تمام n ویں اصلیں حاصل ہونگی اور یہ اصلیں تعداد میں n سے زیادہ نہیں ہونگی کیونکہ وہ ایک دور پورا ہونے کے بعد تکرار پائینگے۔

n ویں اصل کے جملہ کو ہم شکل

$$\{n \text{ ک } (جم عه + ا - ا جب ن طه + ا - ا جب ن طه) = (جم عه + ا - ا جب ن طه + ا - ا جب ن طه)\}$$

میں لکھ سکتے ہیں۔ اب اگر ہم فرض کریں کہ $r = 1$ اور $عه = 0$ ۔ تو مساوات

اسکو لا۔ ا سے تقسیم کرو تو یہ تنکافی مساوات کی معیاری شکل میں تحول ہو جائیگی

$$\text{پھر } y = \frac{1}{y} + \frac{1}{y}$$

مائل ہوگا جس کو حل کرنے سے دی ہوئی مساوات کا حل ملے گا۔

۲۔ $(1 + \lambda) - \lambda = 1$ کو اجزائے ضربی میں تخویل کرو۔

۳۔ وہ مساوات معلوم کرو جس کے حل پرستانی مساوات $لا = ۱ = ۰$ کا حل

۴۔ اگر ثنائی مساوات کو (لا-ا، لا+ا، یا لا-ا) سے تقسیم کر کے) متکافی مساوات کی معیاری شکل میں تحویل کیا جائے تو ثابت کرو کہ تحویل شدہ مساوات کی سب اصلیں خیالی ہوتی ہیں۔ (دیکھو صفحہ ۴۲) مثالیں ۱۵، ۱۶۔

۵۔ اگر اس تحویل شدہ مساوات کو $y = \frac{1}{11}x$ رکھ کر تحویل کیا جائے تو ثابت کرو کہ y میں مساوات کی سب اعلیٰ حقیقی ہوگی اور وہ ۲ اور ۲ کے درمیان واقع ہوگی۔

کیونکہ لامیں دی ہوئی سادات کی اصلیں جم عہ + ما۔ ۱ جب عہ شکل کی ہونگی (دیکھو دفعہ ۵۴)۔ پس لا + $\frac{1}{11}$ کی شکل ۲ جم عہ ہوگی اور اسکی قیمت حقیقی اور ۲ اور ۲ کے درمیان ہوگی۔

۶۔ ثابت کرو کہ مساوات ذیل متکافی ہے۔ اس کو حل کرو:-

$$= \frac{1}{2}(1-u)^2 \frac{1}{u} \frac{1}{1-u} - \frac{1}{2}(1+u-u^2) \frac{1}{u} \frac{1}{1-u}$$

جواب :- اسکی اصلیں 2^2 ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{4}$ ، 1 ، 1 ہیں۔
۷۔ مساوات لا^۹ = ۱ کی سب اصلیں معلوم کرو۔

اسکا حل تین کعبی مساواتوں

$\frac{1}{x} = \frac{x^0}{x^1}, \quad \frac{1}{x^2} = \frac{x^{-2}}{x^0}, \quad \frac{1}{x^3} = \frac{x^{-3}}{x^0}$

ثابت کرو کہ

۱۲۔ ثابت کرو کہ کعبی مسادات فوراً منکافی شکل میں تحویل ہو سکتی ہے اگر اسکے سروں کے

(۱-عہ) (۱-عد) (۱-عد) (۱-عد) = ن

درمیان دفعہ ۲۴ مثال ۸ کا ربط موجود ہو -

۱۳۔ ثابت کرو کہ چار درجہ فوراً متکافی شکل میں تحویل ہو سکتا ہے اگر سروں کے درمیان دفعہ ۲۴ مثال ۲۲ کا ربط موجود ہو۔

۱۴۔ وہ بھی بناؤ جسکی اہلیں ہوں

عہ + عہ^۱ + عہ^۲ + عہ^۳ + عہ^۴
 جہاں عہ، مساوات لاء ۱۔۰ کی ایک خیالی اہل ہے۔

جواب :- $\lambda^2 + \lambda^2 - \lambda^2 - 1 = 1$.

جب اس کعبی کی اصلیں معلوم ہو جاتی ہیں تو مساوات لا۔ا۔ = حاصل دودرجی مساواتوں کے ذریعہ مکمل کیا جاسکتا ہے۔ کیونکہ فرض کرو کہ کعبی کی تین اصلیں لا، لا، لا ہیں۔ تب لا۔ لا، لا + ا۔ = کی اصلیں عہ اور عہ، لا۔ لا، لا + ا۔ = کی اصلیں عہ اور عہ، اور لا۔ لا، لا + ا۔ = کی اصلیں عہ اور عہ ہونگی۔ یہ دیکھ لینا آسان ہے کہ کعبی کی سب اصلیں حقیقی ہیں اور ان کو تقریبی طور پر دسویں باب کے طریقوں کے ذریعہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

۱۵۔ وہ کہی نہیں اوجھکی اعلیں ہوں

جہاں e مساوات ۱۲ = کی ایک خیالی اصل ہے۔

جواب :- $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

گزشتہ مثال کی طرح یہاں بھی جب سنگی کی اسلیں (جو سب حقیقی ہیں) معلوم ہو جاتی ہیں تو شمالی مساوات لائے =۔ کا حل دو درجہ مساواتوں کے ذریعہ مل سکتا ہے۔ فرض کرو کہ سنگی کی اسلیں نام لاء، لاء ہیں۔ اسب یہ دیکھ لینا آسان ہے کہ لاء۔ لاء لاء + =۔ کی اسلیں = + عا اور عا + عا = لاء۔ لاء لاء + =۔ کی اسلیں عا + عا اور عا + عا = عا اور عا۔ لاء لاء + =۔ کی اسلیں عا + عا اور عا + عا ہیں۔ جب

(102)

ان دو درجی مساواتوں کو حل کر لیا جاتا ہے تو اصولوں کا ہر زوج $e^1, e^2, e^3, e^4, e^5, e^6$ وغیرہ ایک دوسرے دو درجی کے حل سے معلوم کیا جاسکتا ہے جیسا کہ مثال باسبق میں بتایا گیا۔
۱۶۔ لا۔ ۱ = ۰۔ کامل دو درجی مساواتوں کے ذریعہ مکمل کرو۔

فرض کرو کہ دی ہوئی مساوات کی ایک خیالی اہل e ہے۔ دو درجی مساواتوں
جسکی اصلیں ہوں

$$e^1 + e^2 + e^3 + e^4 + e^5 + e^6 = 0$$

$$e^1 + e^2 + e^3 + e^4 + e^5 + e^6 = 0$$

اب یہ یہ آسانی معلوم ہو گا کہ $e^1 + e^2 + e^3 + e^4 + e^5 + e^6 = 0$ کی اصلیں $e^1, e^2, e^3, e^4, e^5, e^6$ ہیں اور اس دو درجی کو حل کرنے سے معلوم ہو سکتی ہیں۔ پھر فرض کرو کہ

$$\left\{ \begin{array}{l} e^1 + e^2 + e^3 + e^4 + e^5 + e^6 = 0 \\ e^1 + e^2 + e^3 + e^4 + e^5 + e^6 = 0 \end{array} \right\}$$

تو یہ معلوم ہو گا کہ لا۔ ۱ = ۰۔ کی اصلیں $e^1, e^2, e^3, e^4, e^5, e^6$ ہیں اور لا۔ ۱ = ۰۔ کی اصلیں

$e^1, e^2, e^3, e^4, e^5, e^6$ ہیں۔ پھر انہیں سے ہر ایک کو دو حصوں میں جدا کرنے سے اور دو درجی بنانے سے جس کی اصلیں مثلاً $e^1 + e^2$ اور $e^3 + e^4$ وغیرہ ہوں دو دو اصولوں کے مجموعے معلوم کئے جاسکتے ہیں اور پھر آخر میں دو درجی مساواتوں کے حل سے خود اصولوں کو معلوم کیا جاسکتا ہے جیسا کہ گذشتہ مثالوں میں کیا گیا۔

یہ اور گہری ہوی دو مثالیں گاسس (Gauss) کے طریقہ کی مثالیں ہیں جو مثالی مساوات لا۔ ۱ = ۰۔ کو جبری طور پر حل کرنے میں استعمال ہوتا ہے جبکہ ان عدد مفرد ہو۔ اس قسم کی مساوات کا حل ایسی مساواتوں کے حل پر منحصر کیا جاسکتا ہے جن کا درجہ اس بڑے سے بڑے مفرد عدد سے اعلیٰ تر نہیں تھا جو ان کا جزو ضربی ہے۔ اگر $n = 3$ ان تو حل نمبری کے حل پر منحصر ہوتا ہے کیونکہ $n = 3$ ۔ اگر $n = 4$ تو حل دو درجی مساواتوں کے حل میں تحویل ہو جاتا ہے کیونکہ $n = 4$ ۔ گاسس کا طریقہ استعمال کرنے کے لئے $n = 1$ ۔ خیالی اصولوں کو ہر صورت میں ان میں سے کسی ایک کی قوتوں کی بموجب کسی مناسب ترتیب میں مرتب کرنا ضروری ہے۔ عدد مفرد n کی "ابتدائی اصل"

(Primitive root) میں یہ خاصیت پائی جاتی ہے کہ اگر اسکو صفر سے $n-2$

سب متواتر قوتوں میں اٹھایا جائے اور ہر صورت میں n سے تقسیم کیا جائے تو $n-1$

باقی سب کے سب مختلف ہوتے ہیں۔ (Serret's Cours d'Algebre)

(Superieure vol. II) - کسی مفرد عدد کی ایسی ابتدائی اصلیں متعدد

ہوتی ہیں مثلاً 3 کی $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74, 76, 78, 80, 82, 84, 86, 88, 90, 92, 94, 96, 98, 100$ اور 11 کی $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74, 76, 78, 80, 82, 84, 86, 88, 90, 92, 94, 96, 98, 100$

گاس خیالی اصولوں کو اس طرح مرتب کرتا ہے کہ ان میں سے کسی ایک اصل e کے متواتر

قوت n ، صفر سے $n-2$ تک n کی کسی ابتدائی اصل کی متواتر قوتیں ہوں۔ مثلاً

3 کی چھوٹی سے چھوٹی ابتدائی اصل لی جائے اور 2 کی متواتر قوتوں کو 13 سے تقسیم

کیا جائے تو ہمیں باقیوں کا حسب ذیل سلسلہ ملے گا:-

$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, 65536, 131072, 262144, 524288, 1048576, 2097152, 4194304, 8388608, 16777216, 33554432, 67108864, 134217728, 268435456, 536870912, 1073741824, 2147483648, 4294967296, 8589934592, 17179869184, 34359738368, 68719476736, 137438953472, 274877906944, 549755813888, 1099511627776, 2199023255552, 4398046511104, 8796093022208, 17592186044416, 35184372088832, 70368744177664, 140737488355328, 281474976710656, 562949953421312, 1125899906842624, 2251799813685248, 4503599627370496, 9007199254740992, 18014398509481984, 36028797018963968, 72057594037927936, 144115188075855872, 288230376151711744, 576460752303423488, 1152921504606846976, 2305843009213693952, 4611686018427387904, 9223372036854775808, 18446744073709551616, 36893488147419103232, 73786976294838206464, 147573952589676412928, 295147905179352825856, 590295810358705651712, 1180591620717411303424, 2361183241434822606848, 4722366482869645213696, 9444732965739290427392, 18889465931478580854784, 37778931862957161709568, 75557863725914323419136, 151115727451828646838272, 302231454903657293676544, 604462909807314587353088, 1208925819614629174706176, 2417851639229258349412352, 4835703278458516698824704, 9671406556917033397649408, 19342813113834066795298816, 38685626227668133590597632, 77371252455336267181195264, 154742504910672534362390528, 309485009821345068724781056, 618970019642690137449562112, 1237940039285380274899124224, 2475880078570760549798248448, 4951760157141521099596496896, 9903520314283042199192993792, 19807040628566084398385987584, 39614081257132168796771975168, 79228162514264337593543950336, 158456325028528675187087900672, 316912650057057350374175801344, 633825300114114700748351602688, 1267650600228229401496703205376, 2535301200456458802993406410752, 5070602400912917605986812821504, 10141204801825835211973625643008, 20282409603651670423947251286016, 40564819207303340847894502572032, 81129638414606681695789005144064, 162259276829213363391578010288128, 324518553658426726783156020576256, 649037107316853453566312041152512, 1298074214633706907132624082305024, 2596148429267413814265248164610048, 5192296858534827628530496329220096, 10384593717069655257060992658440192, 20769187434139310514121985316880384, 41538374868278621028243970633760768, 83076749736557242056487941267521536, 166153499473114484112975882535043072, 332306998946228968225951765070086144, 664613997892457936451903530140172288, 1329227995784915872903807060280344576, 2658455991569831745807614120560689152, 5316911983139663491615228241121378304, 10633823966279326983230456482242756608, 21267647932558653966460912964485513216, 42535295865117307932921825928971026432, 85070591730234615865843651857942052864, 170141183460469231731687303715884105728, 340282366920938463463374607431768211456, 680564733841876926926749214863536422912, 1361129467683753853853498429727072845824, 2722258935367507707706996859454145691648, 5444517870735015415413993718908291383296, 10889035741470030830827987437816582766592, 21778071482940061661655974875633165533184, 43556142965880123323311949751266331066368, 87112285931760246646623899502532662132736, 174224571863520493293247799005065324265472, 348449143727040986586495598010130648530944, 696898287454081973172991196020261297061888, 1393796574908163946345982392040522594123776, 2787593149816327892691964784081045188247552, 5575186299632655785383929568162090376495104, 11150372599265311570767859136324180752990208, 22300745198530623141535718272648361505980416, 44601490397061246283071436545296723011960832, 89202980794122492566142873090593446023921664, 178405961588244985132285746181186892047843328, 356811923176489970264571492362373784095686656, 713623846352979940529142984724747568191373312, 1427247692705959881058285969449495136382746624, 2854495385411919762116571938898990272765493248, 5708990770823839524233143877797980545530986496, 11417981541647679048466287755595961091061972992, 22835963083295358096932575511191922182123945984, 45671926166590716193865151022383844364247891968, 91343852333181432387730302044767688728495783936, 182687704666362864775460604089535377456991567872, 365375409332725729550921208179070754913983135744, 730750818665451459101842416358141509827966271488, 1461501637330902918203684832716283019655932542976, 2923003274661805836407369665432566039311865085952, 5846006549323611672814739330865132078623730171904, 11692013098647223345629478661730264157247460343808, 23384026197294446691258957323460528314494920687616, 46768052394588893382517914646921056628989841375232, 93536104789177786765035829293842113257979682750464, 187072209578355573530071658587684226515959365500928, 374144419156711147060143317175368453031918731001856, 748288838313422294120286634350736906063837462003712, 1496577676626844588240573268701473812127674924007424, 2993155353253689176481146537402947624255349848014848, 5986310706507378352962293074805895248510699696029696, 11972621413014756705924586149611790497021399392059392, 23945242826029513411849172299223580994042798784118784, 47890485652059026823698344598447161988085597568237568, 95780971304118053647396689196894323976171195136475136, 191561942608236107294793378393788647952342390272950272, 383123885216472214589586756787577295904684780545900544, 766247770432944429179173513575154591809369561091801088, 1532495540865888858358347027150309183618739122183602176, 3064991081731777716716694054300618367237478244367204352, 6129982163463555433433388108601236734474956488734408704, 12259964326927110866866776217202473468949912977468817408, 24519928653854221733733552434404946937899825954937634816, 49039857307708443467467104868809893875799651909875269632, 98079714615416886934934209737619787751599303819750539264, 196159429230833773869868419475239575503198607639501078528, 392318858461667547739736838950479151006397215279002157056, 784637716923335095479473677900958302012794430558004314112, 1569275433846670190958947355801916604025588861116008628224, 3138550867693340381917894711603833208051177722232017256448, 6277101735386680763835789423207666416102355444464034512896, 12554203470773361527671578846415332832204710888928069025792, 25108406941546723055343157692830665664409421777856138051584, 50216813883093446110686315385661331328818843555712276103168, 100433627766186892221372630771322662657637687111424552206336, 200867255532373784442745261542645325315275374222849104412672, 401734511064747568885490523085290650630550748445698208825344, 803469022129495137770981046170581301261101496891396417650688, 1606938044258990275541962092341162602522202993782792835301376, 3213876088517980551083924184682325205044405987565585670602752, 6427752177035961102167848369364650410088811975131171341205504, 12855504354071922204335696738729300820177623950262342682411008, 25711008708143844408671393477458601640355247900524685364822016, 51422017416287688817342786954917203280710495801049370729644032, 102844034832575377634685573909834406561420991602098741459288064, 205688069665150755269371147819668813122841983204197482918576128, 411376139330301510538742295639337626245683966408394965837152256, 822752278660603021077484591278675252491367932816789931674304512, 1645504557321206042154969182557350504982735865633579863348609024, 3291009114642412084309938365114701009965471731267159726697218048, 6582018229284824168619876730229402019930943462534319453394436096, 13164036458569648337239753460458804039861886925068638906788872192, 26328072917139296674479506920917608079723773850137277813577744384, 52656145834278593348959013841835216159447547700274555627155488768, 105312291668557186697918027683670432318895095400549111254310977536, 210624583337114373395836055367340864637790190801098222508621955072, 421249166674228746791672110734681729275580381602196445017243910144, 842498333348457493583344221469363458551160763204392890034487820288, 1684996666696914987166688442938726917102321526408785780068975640576, 3369993333393829974333376885877453834204643052817571560137951281152, 6739986666787659948666753771754907668409286105635143120275902562304, 13479973333575319897333507543509815336818572211270286240551805124608, 26959946667150639794667015087019630673637144422540572481103610249216, 53919893334301279589334030174039261347274288845081144962207220498432, 107839786668602559178668060348078522694548577690162289924414440996864, 215679573337205118357336120696157045389097155380324579848828881993728, 431359146674410236714672241392314090778194310760649159697657763987456, 862718293348820473429344482784628181556388621521298319395315527974912, 1725436586697640946858688965569256363112777243042596638790631055949824, 3450873173395281893717377931138512726225554486085193277581262111899648, 6901746346790563787434755862277025452451108972170386555162524223799296, 13803492693581127574869511724554050904902217944340773110325048447598592, 27606985387162255149739023449108101809804435888681546220650096895197184, 55213970774324510299478046898216203619608871777363092441300193790394368, 110427941548649020598956093796432407239217743554726184882600387580788736, 220855883097298041197912187592864814478435487109452369765200775161577472, 441711766194596082395824375185729628956870974218904739530401550323154944, 883423532389192164791648750371459257913741948437809479060803100646309888, 1766847064778384329583297500742918515827483896875618958121606201292619776, 3533694129556768659166595001485837031654967793751237916243212402585239552, 7067388259113537318333190002971674063309935587502475832486424805170479104, 14134776518227074636666380005943348126619871175004951664972849610340958208, 28269553036454149273332760011886696253239742350009903329945699220681916416, 56539106072908298546665520023773392506479484700019806659891398441363832832, 113078212145816597093331040047546785012958969400039613319782796882727665664, 226156424291633194186662080095093570025917938800079226639565593765455331328, 452312848583266388373324160190187140051835877600158453279131187530910662656, 904625697166532776746648320380374280103671755200316906558262375061821325312, 1809251394333065553493296640760748560207343510400633813116524750123642650624, 3618502788666131106986593281521497120414687020801267626233049500247285301248, 7237005577332262213973186563042994240829374041602535252466099000494570602496, 14474011154664524427946373126085988481658748083205070504932198000989141204992, 28948022309329048855892746252171976963317496166410141009864396001978282409984, 57896044618658097711785492504343953926634992332820282019728792003956564819968, 115792089237316195423570985008687907853269984665640564039457584007913129639936, 231584178474632390847141970017375815706539969331281128078915168015826259279872, 463168356949264781694283940034751631413079938662562256157830336031652518559744, 926336713898529563388567880069503262826159877325124512315660672063305037119488, 1852673427797059126777135760139006525652319754650249024631321344126610074238976, 3705346855594118253554271520278013051304639509300498049262642688253220148477952, 7410693711188236507108543040556026102609279018600996098525285376506440296955904, 14821387422376473014217086081112052205218558037201992197050570753012880593911808, 29642774844752946028434172162224104410437116074403984394101141506025761187823616, 5928554968950589205686834432444820882087423214$

مثال

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots$$
 میں لا کی بجائے $\frac{1}{a}$ رکھنے سے (دیکھو دفعہ ۳۲)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots$$
 ان مثالوں کو باہم ضرب دیکر $\frac{1}{a}$ سے تقسیم کرو تو بائیں طرف کے
 اجزائیں $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots$ اختیار کر گئے۔ فرض کرو $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$ ی تو دفعہ ۴
 کے روابط کی مدد سے دائیں جانب کے جملہ کو $\frac{1}{a}$ میں n دیں درجہ کے کثیر لایا رقام کے طور پر
 بیان کیا جاسکتا ہے۔

۲۰۔ مساوات

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots$$

کی اصولوں کے متشکل تفاعل $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots$
 اسکو مثال ۱۹ سے نتیجہ سے اخذ کیا جاسکتا ہے اگر اصولوں کو ان کے
 متکافوں میں تبدیل کیا جائے استحالہ مساوات کی اصولوں کے متشکل تفاعل $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots$
 کی قیمت معلوم کی جائے اور $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots$ سے ضرب دیا جائے جو $\frac{1}{a}$ کے مساوی ہے۔

(104)

جواب:- $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots$
 ان متشکل تفاعلوں کی قیمتوں سے جو تیسرے باب میں درج ہیں، دوسرے
 متعدد متشکل تفاعلوں کی قیمتیں متذکرہ بالا عمل سے حاصل کی جاسکتی ہیں۔

۲۱۔ مساوات

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots$$

جواب :- $ع^۵ + پ^۵ + ج^۵ - ۵ع^۴پج (ع^۲ - پ^۲)$

۲۵۔ وہ چار درجہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں ہوں

$$ع + ۲ع^۲، ع^۲ + ۲ع، ع^۳ + ۲ع^۲، ع^۴ + ۲ع$$

جہاں $لا - ۱ = ۰$ کی ایک خیالی اصل $ع$ ہے۔

جواب :- $لا^۳ + ۳لا^۲ - لا^۲ - ۳لا + ۱۱ = ۰$

چھٹا باب

کعبی اور چار درجی کا جبری حل

(105)

۵۵۔ مساواتوں کا جبری حل۔ کعبی اور چار درجی مساواتوں کے حل پر بحث کرنے سے پیشتر ہم چند تمہیدی باتیں بیان کرینگے تاکہ طالب علم ان عام اصولوں سے اچھی طرح واقف ہو جائے جن پر ان مساواتوں کا جبری حل منحصر ہوتا ہے۔ اس مقصد کو پیش نظر رکھ کر ہم اس دفعہ میں دو درجی مساوات (مساوات درجہ دوم) کے حل کے تین طریقے درج کرینگے اور ساتھ ہی یہ بھی بیان کرتے جائینگے کہ کس طرح ان طریقوں کو کعبی اور چار درجی مساواتوں کا جبری حل حاصل کرنے میں وسیع کیا جاسکتا ہے۔ بعد کے دفعات میں ہم ان اصولوں کی پوری تشریح کرینگے۔

(۱) حل کا پہلا طریقہ۔ اصل کیلئے عام شکل $F + Maq$ فرض کرنے سے

چونکہ جملہ $F + Maq$ کی دو اور صرف دو قیمتیں ہیں جبکہ جذر المربع کو دوہری علامت (+) کے ساتھ لیا جاتا ہے اسلئے دو درجی کی اصل کے لئے ایسے جملہ کو فرض کرنا بالکل درست ہے۔ اسلئے $La + F + Maq$ رکھ کر اس کو منطق بنانے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$La^2 - 2Fa + F^2 - C = 0$$

اب اگر یہ دی ہوئی دو درجی مساوات

$$\text{طہ} + \text{ق} = \frac{\text{ف}^۱}{۴} \text{ یعنی طہ} = \frac{\text{ف}^۱ - ۴\text{ق}}{۴}$$

اس قیمت کو طہ کی بجائے درج کیا جائے تو

$$\text{لا} + \text{ف} + \text{لا} + \text{ق} = (\text{لا} + \frac{\text{ف}}{۲}) - (\frac{\text{لا} + \text{ف} - ۴\text{ق}}{۲})$$

پس ہم نے دو درجی کو شکل ۶۔ و ۱ میں تحویل کر دیا جس کے مفرد اجزاء ضربی ۶ + د اور ۶۔ و ہیں۔

اسی طرح ہم کعبی کو شکل

$$(\text{ل} + \text{لا} + \text{م}) - (\text{ل} + \text{لا} + \text{م})^۳ \text{ یا } ۶۔ و$$

میں تحویل کرینگے اور اسکا حل مساواتوں ۶۔ و = ۶۔ و = ۶۔ و = ۶۔ و = ۶۔ و سے حاصل کریں گے۔

یہ بھی دکھایا جائیگا کہ چار درجی کو ایک کعبی مساوات کے حل کرنے سے شکلوں

$$(\text{ل} + \text{لا} + \text{م} + \text{ن}) - (\text{ل} + \text{لا} + \text{م} + \text{ن})^۲$$

$$(\text{لا} + \text{ف} + \text{لا} + \text{ق}) - (\text{لا} + \text{ف} + \text{لا} + \text{ق})$$

(107) میں سے کسی ایک میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔ اور پھر دو دو درجی مساواتوں کو حل کرنے سے چار درجی کا مکمل حل معلوم کیا جاسکتا ہے یعنی پہلی صورت میں $\text{ل} + \text{لا} + \text{م} + \text{ن} = ۰$ اور $(\text{ل} + \text{لا} + \text{م} + \text{ن})$ کو اور دوسری صورت میں $\text{لا} + \text{ف} + \text{لا} + \text{ق} = ۰$ اور $(\text{لا} + \text{ف} + \text{لا} + \text{ق})$ کو حل کرنے سے دئے ہوئے چار درجی کا مکمل حل معلوم ہوتا ہے۔

(۳) حل کا تیسرا طریقہ۔ اصولوں کے متشاکل تفاعلوں سے۔

دو درجی مساوات $\text{لا} + \text{ف} + \text{لا} + \text{ق} = ۰$ پر غور کر جس کی اصلیں

۶۔ و اور ۶۔ و ہیں۔ اصولوں کے درمیان ربط ملینگے

$$۶۔ و = ۶۔ و = \text{ف}$$

$$۶۔ و = \text{ق}$$

اگر ہم ان مساواتوں سے عہ اور بہ کو متعین کرنے کی کوشش کریں تو ہم ابتدائی مساوات پر پہنچ جائیں گے (دیکھو دفعہ ۲۴)۔ لیکن اگر ہمیں اصولوں اور سروں کے درمیان کوئی اور ربط معلوم ہو جائے جو ل عہ + م بہ = فا (ف' ق) کی شکل کا ہو تو ہم آسانی سے عہ اور بہ کو اس مساوات اور مساوات عہ + بہ = ف' س' معلوم کر سکیں گے۔

دو درجی کی صورت میں مطلوبہ مساوات معلوم کرنے میں کوئی قوت نہیں ہے کیونکہ صریحاً

$$(عہ - بہ) = ف' - م ق$$

$$اور اسلئے \quad عہ - بہ = \sqrt{ف' - م ق}$$

کعبی مساوات لآ + ف لا + ق لا + م س = کی صورت میں اصولوں عہ، بہ، جہ کو معلوم کر نیچے لئے مساوات عہ + بہ + جہ = - ف کے علاوہ ل عہ + م بہ + ن جہ = فا (ف' ق، س) کی شکل کی دو مساواتیں مطلوب ہوتی ہیں۔ آئندہ ہم ثابت کر نیچے کہ ایک دو درجی مساوات کو حل کرنے سے تفاعلوں

$$(عہ + سہ بہ + سہ جہ) = ف' (عہ + سہ بہ + سہ جہ)$$

کو کعبی کے سروں کی رقم میں بیان کیا جاسکتا ہے اور جب ان تفاعلوں کی قیمتیں معلوم ہوں تو کعبی کی اصلیں آسانی سے معلوم کیجا سکتی ہیں۔

چار درجی مساوات

$$لآ + ف لا + ق لا + م س + س = ۰$$

کی صورت میں اصولوں عہ، بہ، جہ، ضہ کو معلوم کر نیچے لئے مساوات عہ + بہ + جہ + ضہ = - ف کے علاوہ

$$ل عہ + م بہ + ن جہ + ر ضہ = فا (ف' ق، س، س)$$

کی شکل کی تین مساواتوں کی ضرورت پڑیگی۔ دفعہ ۶۶ میں یہ ثابت کیا جائیگا کہ حسب ذیل تین تفاعلوں

(ب + ج - عہ - ضہ) ^۲ (جہ + عہ - ضہ - بہ) ^۱ (عہ + بہ - جہ - ضہ) ^۲
 کو ایک کعبی مساوات کے حل کرنے سے سروں کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے
 اور جب انہی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں تو چار درجی مساوات کی اصلیں فوراً حاصل
 ہو سکتی ہیں۔

۵۶۔ کعبی مساوات کا جبری حل۔ فرض کرو کہ عام کعبی مساوات

$$۱ لا + ۳ ب لا + ۳ ج لا + د = ۰$$

کو شکل

$$۱ ی + ۳ ھ + ۳ ی گ = ۰$$

میں رکھا گیا ہے جہاں

$$۱ ی = ۱ لا + ۳ ب ھ = ۱ ج - ۳ ب گ = ۳ ب ۱ ج - ۳ ب ۱ ج + ۲ ب ۲$$

(دفعہ ۳۶)

اس مساوات کو حل کر نیکے لئے فرض کرو

$$۱ ی = ۳ ما + ۳ ما$$

اس کا کعب لینے سے

$$۱ ی = ۳ ف + ۳ ق + ۳ ما (۳ ما + ۳ ما)$$

اس لئے

$$۱ ی - ۳ ما = ۳ ق + ۳ ف (۳ ق + ۳ ف) = ۰$$

اب سروں کا مقابلہ کرنے سے

$$۳ ما = ۳ ق + ۳ ف - گ$$

ان مساواتوں سے حاصل ہوگا

لے اس حل کو کارڈن کامل کہتے ہیں۔ دیکھو نوٹ ۱ اس جلد کے ختم پر۔

$$ف = \frac{۱}{۲}(-گ + ۲اگ + ۳ا) \quad ق = \frac{۱}{۲}(-گ - ۲اگ + ۳ا)$$

(109) اور ۲ا ق کی بجائے اسکی قیمت $\frac{۳}{۲}ا$ درجہ کرنے سے

$$ی = ۲ا ق + \frac{۳}{۲}ا$$

اور یہ مساوات

$$ی + ۳ا = ی + گ = ۰$$

کا جبری حل ہے۔

یہ یاد رہے کہ اگر ف کی بجائے ق رکھ دیا جائے تو ی کی یہ قیمت نہیں بدلتی کیونکہ ایسا کرنے سے صرف رقموں کا آپس میں تبادلہ ہوتا ہے۔

نیز چونکہ ۲ا ق کی تین قیمتیں ۲ا ق، ۳ا ق، ۴ا ق ہیں جو

ان میں سے کسی ایک کو اکائی کے تین جذرا لکعبوں سے ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہیں اسلئے ی کی تین اور صرف تین قیمتیں حاصل ہوتی ہیں یعنی

$$۲ا ق + \frac{۳}{۲}ا، ۳ا ق + \frac{۳}{۲}ا، ۴ا ق + \frac{۳}{۲}ا$$

ان قیمتوں کی ترتیب صرف ف کے منتخب شدہ جذرا لکعب کی بموجب بدلتی ہے۔ اب اگر ی کی بجائے اس کی قیمت ۱ لا + ب رکھ دیا جائے تو

$$۱ لا + ب = ۲ا ق + \frac{۳}{۲}ا$$

(جہاں ف کی قیمت وہ ہے جو سروں کی رقم میں معلوم کی گئی ہے) کعبی مساوات
 $۱ لا + ۳ ب لا + ۳ ج لا + د = ۰$

کا مکمل جبری حل ہے۔ اس میں جذرا لکعب اور جذرا المربع عام سے عام شکل میں

لئے گئے ہیں۔

۵۷۔ عددی مساواتوں پر استعمال۔ اگر کعبی کے سرے ہوئے عدد ہوں
تو کعبی کا حل جو ہم نے اوپر حاصل کیا ہے دو درجی کے حل کے برخلاف کوئی عملی
قیمت نہیں رکھتا حالانکہ جبری حل کے لحاظ سے یہ حل بالکل مکمل ہے۔
کیونکہ جب کعبی کی اصلیں سب کی سب حقیقی ہوں تو $g + 2h = 0$ ۔
جو لازماً منفی عدد ہے (دیکھو دفعہ ۴۳) اور f اور q کی بجائے $2h$ قیمتیں
 $\frac{1}{2}(g \pm k - h - 1)$

(110)

ضابطہ ۲۸۴ + ۲۸۵ میں درج کیجائیں تو کعبی کی اصل کے لئے ہمیں حسب
جملہ ملیگا:-

$$\frac{1}{2}(g + k - h - 1) + \frac{1}{2}(g - k - h - 1)$$

اب ایسے ملے عددوں کا جذر الگ نکالنے کے لئے کوئی عام حسابی
عمل موجود نہیں ہے اور اسلئے جہاں تک کہ حسابی عمل کا تعلق ہے یہ ضابطہ یکا رہے
لیکن جب کعبی کی اصلوں کا ایک زوج خیالی ہو تو ضابطہ

$$\frac{1}{2}(g + k + 2h - 2) + \frac{1}{2}(g - k + 2h - 2)$$

سے ایک عددی قیمت حاصل ہو سکتی ہے کیونکہ اس صورت میں $g + 2h$ مثبت
مثبت ہے۔ لیکن یہ عمل بھی عددی کعبی کی حقیقی اصل معلوم کرنے کے لئے بے سود ہے
پہلی صورت میں یعنی جب کعبی کی سب اصلیں حقیقی ہوں تو اصلوں کی
عدد قیمتیں معلوم کرنے کے لئے ہم علمِ مثلث کا استعمال حسب طرہ ذیل کر سکتے ہیں۔
فرض کرو 2 کا جم نہ = g اور 2 کا جب نہ = g

$$f = 2h - 1, q = 2h - 1$$

تو

نیز مس نہ = - ک $\frac{1}{4}$ اور $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} (گ + ک) = \frac{1}{4} (-ہ) = \frac{1}{4}$

اور چونکہ $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}$ جب $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}$ اس لئے کعبی

$$۳ + ۲ + ۱ = گ$$

کی تین اصلیں

$$۳ + ۲ + ۱ = گ + ۲ + ۱ = گ + ۳ + ۲ + ۱ = گ + ۶$$

ہو جاتی ہیں

$$۲ (-ہ) \frac{1}{4} = \frac{1}{4} (-ہ) \frac{1}{4} = \frac{1}{4} (-ہ) \frac{1}{4} = \frac{1}{4} (-ہ) \frac{1}{4}$$

ان ضابطوں سے کعبی کی اصولوں کی عددی قیمتیں جیوب اور جیوب التمام کی جدول کے ذریعہ معلوم ہو سکتی ہیں۔ یہ طریقہ بھی علی طور پر کچھ آسان نہیں اور عام طور پر حقیقی اصولوں کو حسابی طریقہ سے محسوب کر نیچے لے ان طریقوں کو استعمال کرنا چاہئے جو آئندہ دسویں باب میں بیان کئے جائیں گے۔

۵۸۔ کعبی کو دو مکعبوں کے فرق کی شکل میں بیان کرنا۔ فرض کر دو

وئے ہوئے کعبی

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰ + ۲۱ + ۲۲ + ۲۳ + ۲۴ + ۲۵ + ۲۶ + ۲۷ + ۲۸ + ۲۹ + ۳۰ + ۳۱ + ۳۲ + ۳۳ + ۳۴ + ۳۵ + ۳۶ + ۳۷ + ۳۸ + ۳۹ + ۴۰ + ۴۱ + ۴۲ + ۴۳ + ۴۴ + ۴۵ + ۴۶ + ۴۷ + ۴۸ + ۴۹ + ۵۰ + ۵۱ + ۵۲ + ۵۳ + ۵۴ + ۵۵ + ۵۶ + ۵۷ + ۵۸ + ۵۹ + ۶۰ + ۶۱ + ۶۲ + ۶۳ + ۶۴ + ۶۵ + ۶۶ + ۶۷ + ۶۸ + ۶۹ + ۷۰ + ۷۱ + ۷۲ + ۷۳ + ۷۴ + ۷۵ + ۷۶ + ۷۷ + ۷۸ + ۷۹ + ۸۰ + ۸۱ + ۸۲ + ۸۳ + ۸۴ + ۸۵ + ۸۶ + ۸۷ + ۸۸ + ۸۹ + ۹۰ + ۹۱ + ۹۲ + ۹۳ + ۹۴ + ۹۵ + ۹۶ + ۹۷ + ۹۸ + ۹۹ + ۱۰۰$$

کو شکل

$$۳ + ۲ + ۱ = گ$$

میں رکھا گیا ہے جہاں $۱ + ۲ + ۳ = گ$

اب فرض کرو

$$۳ + ۲ + ۱ = گ \quad ۱ = ۱ \quad ۲ = ۲ \quad ۳ = ۳ \quad ۴ = ۴ \quad ۵ = ۵ \quad ۶ = ۶ \quad ۷ = ۷ \quad ۸ = ۸ \quad ۹ = ۹ \quad ۱۰ = ۱۰ \quad ۱۱ = ۱۱ \quad ۱۲ = ۱۲ \quad ۱۳ = ۱۳ \quad ۱۴ = ۱۴ \quad ۱۵ = ۱۵ \quad ۱۶ = ۱۶ \quad ۱۷ = ۱۷ \quad ۱۸ = ۱۸ \quad ۱۹ = ۱۹ \quad ۲۰ = ۲۰ \quad ۲۱ = ۲۱ \quad ۲۲ = ۲۲ \quad ۲۳ = ۲۳ \quad ۲۴ = ۲۴ \quad ۲۵ = ۲۵ \quad ۲۶ = ۲۶ \quad ۲۷ = ۲۷ \quad ۲۸ = ۲۸ \quad ۲۹ = ۲۹ \quad ۳۰ = ۳۰ \quad ۳۱ = ۳۱ \quad ۳۲ = ۳۲ \quad ۳۳ = ۳۳ \quad ۳۴ = ۳۴ \quad ۳۵ = ۳۵ \quad ۳۶ = ۳۶ \quad ۳۷ = ۳۷ \quad ۳۸ = ۳۸ \quad ۳۹ = ۳۹ \quad ۴۰ = ۴۰ \quad ۴۱ = ۴۱ \quad ۴۲ = ۴۲ \quad ۴۳ = ۴۳ \quad ۴۴ = ۴۴ \quad ۴۵ = ۴۵ \quad ۴۶ = ۴۶ \quad ۴۷ = ۴۷ \quad ۴۸ = ۴۸ \quad ۴۹ = ۴۹ \quad ۵۰ = ۵۰ \quad ۵۱ = ۵۱ \quad ۵۲ = ۵۲ \quad ۵۳ = ۵۳ \quad ۵۴ = ۵۴ \quad ۵۵ = ۵۵ \quad ۵۶ = ۵۶ \quad ۵۷ = ۵۷ \quad ۵۸ = ۵۸ \quad ۵۹ = ۵۹ \quad ۶۰ = ۶۰ \quad ۶۱ = ۶۱ \quad ۶۲ = ۶۲ \quad ۶۳ = ۶۳ \quad ۶۴ = ۶۴ \quad ۶۵ = ۶۵ \quad ۶۶ = ۶۶ \quad ۶۷ = ۶۷ \quad ۶۸ = ۶۸ \quad ۶۹ = ۶۹ \quad ۷۰ = ۷۰ \quad ۷۱ = ۷۱ \quad ۷۲ = ۷۲ \quad ۷۳ = ۷۳ \quad ۷۴ = ۷۴ \quad ۷۵ = ۷۵ \quad ۷۶ = ۷۶ \quad ۷۷ = ۷۷ \quad ۷۸ = ۷۸ \quad ۷۹ = ۷۹ \quad ۸۰ = ۸۰ \quad ۸۱ = ۸۱ \quad ۸۲ = ۸۲ \quad ۸۳ = ۸۳ \quad ۸۴ = ۸۴ \quad ۸۵ = ۸۵ \quad ۸۶ = ۸۶ \quad ۸۷ = ۸۷ \quad ۸۸ = ۸۸ \quad ۸۹ = ۸۹ \quad ۹۰ = ۹۰ \quad ۹۱ = ۹۱ \quad ۹۲ = ۹۲ \quad ۹۳ = ۹۳ \quad ۹۴ = ۹۴ \quad ۹۵ = ۹۵ \quad ۹۶ = ۹۶ \quad ۹۷ = ۹۷ \quad ۹۸ = ۹۸ \quad ۹۹ = ۹۹ \quad ۱۰۰ = ۱۰۰$$

جہاں مہ اور نہ دریافت شدنی مقداریں ہیں۔ اس متماثلہ کی بائیں جانب کے جملہ کو مختصر کرو تو وہ ہو جائیگا

$$\text{می} - ۳ \text{ مہ نہ ی} - \text{مہ نہ (مہ + نہ)}$$

سروں کا مقابلہ کرنے سے

$$\text{مہ نہ} = \text{ہ} - \text{مہ نہ (مہ + نہ)} = \text{گ}$$

$$\text{اسلئے} \quad \text{مہ + نہ} = \text{گ} \quad \text{مہ - نہ} = \frac{\Delta ۱}{\text{ہ}}$$

$$\text{جہاں } \Delta = \text{گ} + ۳ \text{ ہ} + ۲ \text{ مہ} \text{ حسب دفعہ ۲۔}$$

$$\text{نیز} \quad (\text{ی} + \text{نہ}) (\text{ی} + \text{مہ}) = \text{ی} + \frac{\text{گ}}{\text{ہ}} \text{ ی} - \text{ہ}$$

اسلئے ی کی بجائے اسکی قیمت ۱ لا + ب رکھنے پر ہمیں (۱) سے حاصل ہوگا

$$\Delta \text{ ف (لا)} = \left(\frac{\text{گ} + \Delta ۱}{\Delta ۲} \right) (۱ + \text{لا} + \text{ب} + \text{گ} - \frac{\Delta ۱}{\text{ہ}}) \quad (۲)$$

$$- \left(\frac{\text{گ} - \Delta ۱}{\Delta ۲} \right) (۱ + \text{لا} + \text{ب} + \frac{\text{گ} + \Delta ۱}{\Delta ۲}) \quad (۳)$$

جو دو کعبوں کا مطلوبہ فرق ہے۔

(112) اس متماثلہ کی مدد سے کعبی کو مفروضہ اجزائے ضربی میں تحویل کیا جاسکتا ہے

اور کعبی مساوات کا مکمل حل معلوم ہو سکتا ہے۔ اب ہم مساوات ف (لا) = کی اصلیں مہ اور نہ کی رقوم میں حاصل کریں گے۔ مساوات

(مہ - نہ) $\Delta \text{ ف (لا)} = \text{مہ (ی + نہ)} - \text{نہ (ی + مہ)} = ۰$ کو ثنائی کعبی کے طور پر حل کیا جائے تو ی = لا + ب کے لئے ہمیں منسلک تین قیمتیں ملنیگی :-

$$\text{ہما مہ مہ (ہما مہ + ہما نہ)}$$

$$\text{ہما مہ مہ (مہ مہ + مہ نہ)}$$

۳امہ ۳مانہ (۳سہ ۳امہ + ۳سہ ۳مانہ)
اب اگر ۳امہ اور ۳مانہ کی بجائے جذرا لکعبوں کا کوئی زوج
رکھ دیا جائے جو دو سلسلوں

۳امہ ۳سہ ۳امہ ۳سہ ۳مانہ
۳مانہ ۳سہ ۳مانہ ۳سہ ۳مانہ

میں سے ہر ایک سے ایک ایک جذرا لکعب منتخب کر کے بنایا گیا ہو تو یہ
معلوم ہو گا کہ یہی تین قیمتیں حاصل ہوتی ہیں اور ان قیمتوں کی صرف
ترتیب منتخب شدہ جذرا لکعب کی بموجب بدلتی ہے۔ اس سے یہ نتیجہ
نکلتا ہے کہ جملہ

۳امہ ۳مانہ (۳امہ + ۳مانہ)

کی تین اور صرف تین قیمتیں ہیں جب کہ جذرا لکعبوں کو عام سے عام شکل
میں لیا جائے۔ اسلئے یہ شکل دفعہ ماضی کی حاصل شدہ شکل کے علاوہ ایسی
شکل ہے جو کبھی سادات کی اصل کو تعبیر کرنے میں استعمال ہو سکتی ہے۔ دیکھو
دفعہ ۵۵ (۱)۔

جب تفاعل (۲) کو (جو اوپر بیان ہوا) مستحیل کر کے مختصر کیا جاتا ہے تو وہ

{ (ا ج - ب ا) لا + (ا د - ب ج) لا + (ب د - ج ا) }

ہو جاتا ہے اسلئے اس دو درجی کے اجزاء کے ضربی دو ثنائی جملے

لا + ب + مہ لا + لا + ب + نہ
ہیں جو ف (لا) کے مذکورہ بالا جملہ میں دو لکعبوں کے فرق کے طور پر واقع
ہوتے ہیں۔

۵۹۔ اصلوں کے متشاکل تفاعلوں کے ذریعہ کبھی کا حل۔ چونکہ جملہ

(دیکھو مثال ۵ صفحہ ۶۰ اور مثال ۱۵ صفحہ ۶۹) -

$$(طہ کی) (طہ م) = ل م = عہ + بہ + جہ - عہ - عہ - عہ - عہ$$

$$= ۹ - \frac{۵}{۲}$$

اس لئے دو درجی مساوات

$$ت + ۳ = \frac{۳}{۲} گ - ت - \frac{۵}{۲}$$

کی اصلیں ہیں

$$(عہ + سہ بہ + سہ جہ) (عہ + سہ بہ + سہ جہ)$$

اس مساوات کی اصلوں کو یعنی

$$\frac{۳}{۲} (گ - ۳) = ۵ + ۲$$

(۱۱۴) کو ت اور ت سے تعبیر کیا جائے تو ابتدائی ضابطہ سے جو کبھی کے سروں کی رقوم میں بیان ہو چکا ہے ہمیں تین اصلیں حاصل ہونگی

$$عہ = -\frac{۵}{۲} + \frac{۱}{۳} (۳ ت + ۳ ت)$$

$$بہ = -\frac{۵}{۲} + \frac{۱}{۳} (سہ ت + سہ ت)$$

$$جہ = -\frac{۵}{۲} + \frac{۱}{۳} (سہ ت + سہ ت)$$

یہاں یہ بات دیکھ لی جاسکتی ہے کہ غہ، بہ، جہ کی جن قیمتوں پر ہم پہنچے ہیں وہ اسی شکل کی ہیں جو دفعہ ۵۶ میں حاصل ہوئی تھیں -
تفاحوں

$$(عہ + سہ بہ + سہ جہ) (عہ + سہ بہ + سہ جہ)$$

کی اس خاصیت کا خیال رکھنا ضروری ہے کہ وہ تین مقداروں کے سادہ ترین
تفاعل ہیں جنکی صرف دو قیمتیں ہوتی ہیں جبکہ ان مقداروں کو باہم کسی
طرح ایک دوسرے کی جگہ بدل دیا جائے۔ اسی خاصیت کی بنا پر کبھی مساوات
کامل دو درجی مساوات کے حل پر منحصر کیا جاسکتا ہے۔ عہدہ یہ کہ جو
متعدد تفاعل ایسے ہیں جنہیں یہ خاصیت پائی جاتی ہے اور آئندہ چلکر یہ
ثابت کیا جائیگا کہ کسی دو ایسے تفاعلوں میں ایک منقطع خطی ربط موجود
ہوتا ہے جو سروں کی رقم میں بیان کیا جاسکتا ہے۔
کبھی کو جبریا طریقہ پر حل کرنے کے متعدد طریقوں پر مکمل بحث کر نیکی
بعد ہم ایسی مثالیں درج کرتے ہیں جنہیں دفعات ماضی کے اصول استعمال
میں آتے ہیں۔

مشائیں

۱۔ حمل

(ب-ج) (ج-ع) + (ع-ح) + (ح-د) + (د-ه) + (ه-و) + (و-ز) + (ز-حج) + (حج-ب)

کو مفرد اجزاء کی ضرورت میں تحلیل کرو۔

فرض کرو $ع = (ب - ج) (لام - ع) = و = (ج - ع) (لا - ع)$

$$(z-1)(z-6) = 0$$

جواب :- $\frac{1}{p^2} (6+9+9+6) (6+9+9+6) (6+9+9+6)$

۲۔ نہایت کرو کہ نظام

(یہ - جب) (لا - ع) = (جہ - عم) (لا - ب) = (عہ - ب) (لا - جہ)

کی مساداتوں میں دو اجزاء کے ضمنی مشترک ہیں۔

مثال ماضی کی تفہیم کو اختیار کرنے سے

م = و = ع

جس سے $e^2 - e = (e^2 + e + 1)(e - 1) \equiv \frac{1}{p} (e^2 + e + 1)(e - 1)$

• = 10 + 9 + 8

اسلئے (بہ - جب) (لا - عہ) + (جہ - عہ) (لا - بہ) + (عہ - بہ) (لا - جہ) مطلبہ مشترک جزو ضربی ہے جو دوسرے درجہ کا ہے۔

۳۔ حسب ذیل جملوں کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

(۱) (بہ - جب) (لا - عہ) + (جہ - عہ) (لا - بہ) + (عہ - بہ) (لا - جہ) ،

(۲) (بہ - جب) (لا - عہ) + (جہ - عہ) (لا - بہ) + (عہ - بہ) (لا - جہ) ،

(۳) (بہ - جب) (لا - عہ) + (جہ - عہ) (لا - بہ) + (عہ - بہ) (لا - جہ) ،

انچے اجزائے ضربی مثال ۴ صفحہ ۸۲ میں حاصل شدہ نتیجوں کی مدد سے فوراً لکھے جاسکتے ہیں۔ مثال (۱) کی ترقیم استعمال کرنے سے اور مثال ۴ صفحہ ۸۲ میں عہ، بہ، جہ کی بجائے ع، و، جہ کرنے سے حسب ذیل اجزائے ضربی حاصل ہونگے :-

جواب :- (۱) ۳ ع و صہ (۲) ۵ (ع + و + صہ) ع و صہ

(۳) ۴ (ع + و + صہ) ع و صہ

۴۔ (لا - عہ) (لا - بہ) (لا - جہ)

کو دو مکعبوں کے فرق کی شکل میں بیان کرو۔ فرض کرو

(لا - عہ) (لا - بہ) (لا - جہ) = عہ - و

جس سے

عہ - و = لہ (لا - عہ)

صہ - عہ = سہ و = مہ (لا - بہ)

صہ - و = سہ و = نہ (لا - جہ)

جمع کرنے سے

لہ + مہ + نہ = ۰، لہ عہ + مہ بہ + نہ جہ =

اور اسلئے

لہ = مہ (بہ - جب) مہ = مہ (جہ - عہ) نہ = مہ (عہ - بہ)

لیکن لہ مہ نہ = ۰، اس لئے

اور اور چونکہ

$$ل^۲ - م^۲ = ۳ - ۱۳ (ب - ج) (ج - ع) (ع - ہ)$$

$$(ل^۲ - م^۲) = (ل + م) (ل - م)$$

اس لئے $ل^۲ + م^۲$ کی اور $ل$ کی قیمتوں کو درج کرنے سے جو دفعہ ۵۹ میں حاصل کیجا چکی ہیں حاصل ہوگا

$$(ب - ج) (ج - ع) (ع - ہ) = ۲۷ (گ + ۴) (۵)$$

(دیکھو دفعہ ۴۲)

۷۔ تماشلات ذیل ثابت کرو:-

$$ل^۲ + م^۲ = \frac{۱}{۳} \{ (۲ - ب - ج) + (۲ - ج - ع) + (۲ - ع - ہ) \}$$

$$ل^۲ - م^۲ = \frac{۱}{۳} \{ (ب - ج) + (ج - ع) + (ع - ہ) \}$$

ل + م وغیرہ ل - م وغیرہ کی قیمتوں کو جو مثال مابقی میں دی گئی ہیں تسری قوت پر اٹھائے اور جمع کرنے سے ہم ہ آسانی مذکورہ بالا تماشلات حاصل کر سکتے ہیں۔

۸۔ ع - یہ جہ کے فرقوں کی رقوم میں کی $ل^۲$ م ۲ وغیرہ کے لئے چلے معلوم کرو۔

$$(ع + م + ب + س + ج) اور (ع + م + س + ب + ج) میں سے$$

$$(ع + م + ب + ج) (۱ + م + س) =$$

کو تفریق کرنے سے $ل^۲$ اور $م^۲$ کے لئے حسب ذیل چلے حاصل ہوتے ہیں:-

$$- ل^۲ = (ب - ج) + (ج - ع) + (ع - ہ) + م^۲$$

$$- م^۲ = (ب - ج) + (ج - ع) + (ع - ہ) + ل^۲$$

اسی طرح ان جملوں سے ہم حاصل کریں گے

رقوم میں اس طرح بیان کر سکتے ہیں :-

$$\text{فہ} = ۲ + ۳ \frac{\text{گ}}{۴} \text{فہ} = ۳ - ۶ \frac{\text{ھ}}{۴} = ۰$$

۱۰۔ لی اور مد کی رقوم میں ایسی مساوات بناؤ جس کی اصلیں عام
کبھی مساوات کی اصولوں کے فرقوں کے مربع ہوں -
فرض کرو کہ فہ = (عہ - یہ) ۲

پس قبل الذکر نتیجوں سے

$$\text{مہ} = ۳ \text{فہ} = ۳ \text{سہ} - \text{لہ} - \text{سہ} \text{مہ}$$

اس کو منطبق بناؤ تو

$$\text{فہ} = (۲ - \text{لہ} - \text{سہ}) + (۲ - \text{لہ} - \text{سہ}) = ۰$$

یہ مطلوبہ مساوات ہے -
اسی طرح مثال ۸ کے نتیجوں کی مدد سے اس مساوات کی مربع دائروں
مساوات یا وہ مساوات جسکی اصلیں ہوں

(یہ - جہ) ۲ (عہ - بہ - جہ) ۲ (جہ - عہ) ۲ (عہ - بہ) ۲ (جہ - عہ) ۲
حاصل ہوتی ہے اگر ہم آخری مساوات میں مد اور لی کی بجائے علی الترتیب
- لی اور - مد درج کریں اور اس عمل کو عینی مرتبہ ہم چاہیں دہرا سکتے ہیں -
بالآخر یہ سب مساواتیں کبھی کے سروں کی رقوم میں روابط

$$\text{لہ} = ۹ - ۶ \frac{\text{ھ}}{۴} \text{ اور } \text{لہ} + ۲ = ۲ - ۲ \frac{\text{گ}}{۴}$$

کی مدد سے یہ آسانی بیان ہو سکتی ہیں - تنزیلاً پہلی مساوات ہوگی

$$\text{فہ} = (۲ + ۹ \frac{\text{ھ}}{۴}) + (۲ + ۲ \frac{\text{گ}}{۴}) = ۰$$

(دیکھو دفعہ ۲۲)

۱۱۔ اگر کبھی مساواتوں

$$۱ \text{ لآ} + ۳ \text{ ب لآ} + ۳ \text{ ج لا} + ۳ \text{ د} = ۰$$

$$۰ \text{ لآ} + ۳ \text{ ب لآ} + ۳ \text{ ج لا} + ۳ \text{ د} = ۰$$

کی اصلیں عہ یہ ، جہ اور عہ یہ ، جہ ہوں تو وہ مساوات بناؤ جبکی اصلیں تفاعل

$$۰ = ۳ \text{ عہ عہ} + ۳ \text{ بہ بہ} + ۳ \text{ جہ جہ}$$

کی چھ قیمتیں ہوں -

غل کا سب سے آسان طریقہ یہ ہے کہ پہلے ان کعبیوں کے لئے وہ مساواتیں بنائی جائیں جن میں دوسری قیمتیں موجود نہ ہوں یعنی

$$۳ \text{ عہ عہ} + ۳ \text{ بہ بہ} + ۳ \text{ جہ جہ} = ۰$$

اور پھر مطلوبہ مساوات عام صورت میں ان سے اخذ کی جائے گی کیونکہ اس طور پر تمام مساواتیں کعبیوں کی صورت میں اصولوں کے دئے ہوئے تفاعل کے جواب میں تفاعل

$$۰ = (۳ \text{ عہ عہ} + ۳ \text{ بہ بہ} + ۳ \text{ جہ جہ}) + (۳ \text{ عہ عہ} + ۳ \text{ بہ بہ} + ۳ \text{ جہ جہ}) + (۳ \text{ عہ عہ} + ۳ \text{ بہ بہ} + ۳ \text{ جہ جہ})$$

$$+ (۳ \text{ عہ عہ} + ۳ \text{ بہ بہ} + ۳ \text{ جہ جہ}) + (۳ \text{ عہ عہ} + ۳ \text{ بہ بہ} + ۳ \text{ جہ جہ}) + (۳ \text{ عہ عہ} + ۳ \text{ بہ بہ} + ۳ \text{ جہ جہ})$$

حاصل ہو گا -

استعمال شدہ مساواتوں کی اصولوں کی بجائے ان کی قیمتیں جنکو جذروں سے بیان کیا گیا ہے درج کرنے سے

$$۰ = (۳ \text{ عہ عہ} + ۳ \text{ بہ بہ} + ۳ \text{ جہ جہ}) + (۳ \text{ عہ عہ} + ۳ \text{ بہ بہ} + ۳ \text{ جہ جہ}) + (۳ \text{ عہ عہ} + ۳ \text{ بہ بہ} + ۳ \text{ جہ جہ})$$

$$+ (۳ \text{ عہ عہ} + ۳ \text{ بہ بہ} + ۳ \text{ جہ جہ}) + (۳ \text{ عہ عہ} + ۳ \text{ بہ بہ} + ۳ \text{ جہ جہ}) + (۳ \text{ عہ عہ} + ۳ \text{ بہ بہ} + ۳ \text{ جہ جہ})$$

جو شکل

$$۰ = ۳ \text{ عہ عہ} + ۳ \text{ بہ بہ} + ۳ \text{ جہ جہ}$$

میں تحویل ہوتا ہے -

اس کا کعب لینے سے حاصل ہوتا ہے

$$۰ = ۳ \text{ عہ عہ} + ۳ \text{ بہ بہ} + ۳ \text{ جہ جہ} - ۳ \text{ عہ عہ} - ۳ \text{ بہ بہ} - ۳ \text{ جہ جہ} = ۰$$

اب f, q اور f, q کی بجائے ان کی قیمتیں جو مساواتوں

$$لا + گ - لا - ھ = ۰, لا + گ - لا - ھ = ۰$$

سے حاصل ہوتی ہیں q کی جائیں تو f کی قیمتیں دو کبھی مساواتوں

$$f = ۲۷ھ - ۲۷ - (گ - گ) = (۵۵ - ۵۵) = ۰$$

سے مل جائیں گی جہاں

$$۵۵ = گ + ۲۷ھ \text{ اور } ۵۵ = گ + ۲۷ھ$$

آخر الامر f کی بجائے اس کی قیمت $۵۵ - ۳۷ = ۱۸$ بے q کے کرنے سے

اور ان دو کبھیوں کو باہم ضرب دینے سے ہمیں مطلوبہ مساوات ملے گی۔ یہ یاد رہے کہ اگر ایک کبھی $۱ - ۱ = ۰$ ہو تو $f = ۰ + ۳۷ھ + ۳۷ھ$ وغیرہ۔

اس صورت پر مثال ۹ میں غور کیا جا چکا ہے۔

۱۲۔ دو مساوات بننا جس کی اسکیں q کی مختلف قیمتیں ہوں جہاں

(119)

$$۳۷ = \frac{۵۵ - ۳۷}{۳۷ - ۳۷}$$

اور $۳۷ = ۳۷$ جب مساوات $۵۵ + ۳۷ = ۳۷ + ۳۷$ کی اصلیں ہیں۔

چونکہ $۳۷ = ۳۷$ کے صرف فرق اور ان کی قیمتیں شامل ہیں اسلئے

نتیجہ وہی حاصل ہوگا اگر $۳۷ = ۳۷$ کے ساتھ مساوات $۵۵ + ۳۷ = ۳۷ + ۳۷$ کی اصلیں

اس لئے

$$۳۷ = (۱ - ۳۷) ۵۵ = (۱ + ۳۷) ۵۵$$

$$گ = ۵۵ = (۱ + ۳۷) ۵۵ = \frac{(۲ - ۳۷)(۱ - ۳۷)}{۲(۱ + ۳۷)}$$

$$اور اسی طرح ھ = \frac{(۱ + ۳۷ - ۲۷)}{۲(۱ + ۳۷)}$$

ان سے می کو ساقط کر دیا جائے تو مطلوبہ مساوات ملے گی

$$h^2 \{ (s+1)(s-2)(s-3) \} + g^2 \{ (s+1)(s-2) \} = 0$$

۱۳۔ کعبیوں

$$1 \text{ لا}^2 + 3 \text{ ب لا}^2 + 3 \text{ ج لا} + د = 0$$

$$2 \text{ لا}^2 + 3 \text{ ب لا}^2 + 3 \text{ ج لا} + د = 0$$

کے سروں کے درمیان ربط معلوم کرو جبکہ اصولوں میں ربط

$$عہ (یہ - جہ) + بہ (جہ - عہ) + جہ (عہ - بہ) = 0$$

موجود ہو۔

سہ - سہ سے ضرب دو تو یہ مساوات ہو جائیگی

$$ل م = ل م$$

کامب لیکر سروں کو داخل کرنے سے مطلوبہ مساوات حاصل ہوگی

$$g^2 h^2 = g^2 h^2$$

۱۴۔ سروں اور اصولوں کی رقوم میں وہ شرط معلوم کرو کہ مثال ۱۳ کی کعبی مساواتیں خطی استعمال

$$لا = پ لا + ق$$

سے مماثل ہو جائیں۔

اس صورت میں

$$عہ = پ پ + ق، بہ = پ پ + ق، جہ = پ پ + ق$$

پ اور ق کو ساقط کرنے سے

$$یہ جہ - یہ جہ + جہ عہ - جہ عہ + عہ بہ - عہ بہ = 0$$

جو اصولوں کا ایسا تفاعل ہے جس پر مثال ماسبق میں غور کیا جا چکا ہے۔ مزید بریں یہ ربط غیر متغیر رہتا ہے اگر عہ، بہ، جہ، اور عہ، یہ، جہ، کی بجائے

$$ل عہ + م، ل بہ + م، ل جہ + م،$$

$$ل عہ + م، ل یہ + م، ل جہ + م$$

(120)

درج کئے جائیں۔ اس لئے ہم مثال مابقی کی کبھی مساواتوں کو سادہ شکلوں

$$۱ + ۳ھ + ۵ی + گ = ۰، ۲ + ۳ھ + ۵ی + گ = ۰$$

میں غور کر سکتے ہیں جو خطی استحالوں کی $۱ + ۳ھ + ۵ی + گ = ۰$ سے حاصل ہوتے ہیں۔ کیونکہ اگر شرط قبل الذکر مساواتوں پر صادق آتی ہے تو بعد الذکر مساواتوں پر بھی صادق آتی چاہیے۔

اب رکھو $۱ + ۳ھ + ۵ی + گ = ۰$ تو یہ مساواتیں مماثل ہو جائیں گی اگر

$$۱ = ۳ھ + ۵ی + گ$$

ان سے ک کو ساقط کیا جائے تو مطلوبہ شرط حاصل ہوگی

$$۱ = ۳ھ + ۵ی + گ$$

یہ شرط وہی ہے جو مثال ۱۳ میں حاصل ہوئی تھی۔ یہ یاد رہے کہ کعبیوں کو تنحویل کرنے والے دو درجی اُسی استحالہ یعنی

$$\frac{۱}{۳} (۱ + ۳ھ + ۵ی + گ) = \frac{۱}{۳} (۱ + ۳ھ + ۵ی + گ)$$

سے مماثل ہوتے ہیں۔

۶۰۔ کبھی کی دو اصلوں کے درمیان ہم رسم ربط۔ چار درجی کی بحث

شروع کرنے سے پیشتر ہم کبھی کے لئے حسب ذیل اہم مسئلہ ثابت کرتے ہیں:-

کبھی کی اصلوں میں سے دو دو اصلوں کے درمیان سروں کی

رقوم میں ایک ہم رسم ربط ہوتا ہے۔

دفعہ ۲۷ کی ۱۳ ویں اور ۱۴ ویں مثالوں سے ہم جانتے ہیں کہ

$$\{ (۱ - ۳ھ) + (۳ھ - ۵ی) + (۵ی - گ) \} = ۱۸ (۱ - ۳ھ - ۵ی - گ)$$

$$\{ (۳ھ - ۵ی) + (۵ی - گ) + (۱ - ۳ھ) \} = ۹ (۱ - ۳ھ - ۵ی - گ)$$

$$\{ (۵ی - گ) + (۱ - ۳ھ) + (۳ھ - ۵ی) \} = ۱۸ (۱ - ۳ھ - ۵ی - گ)$$

ترتیم

$$\begin{aligned} \text{ب} - \text{ا} &= \text{ا} - \text{ب} = \text{ا} - \text{ب} = \text{ا} - \text{ب} \\ \text{ا} - \text{ب} &= \text{ا} - \text{ب} = \text{ا} - \text{ب} = \text{ا} - \text{ب} \end{aligned}$$

کو استعمال کرنے ' اوپر کی مساواتوں کو علی الترتیب عہ بیہ - (عہ + بیہ) ' ا سے ضرب دینے ' حاصل ضربوں کو جمع کرنے اور انہیں کا لیا فا رکھنے سے کہ

$$\text{عہ} - \text{عہ} + (\text{عہ} + \text{بیہ}) + \text{عہ} - \text{بیہ} = 0$$

بہیں حاصل ہوگا

$$\text{ب} - \text{ا} = (\text{جہ} - \text{عہ}) (\text{عہ} - \text{بیہ}) = 18$$

لیکن

$$\text{ب} - \text{ا} = (\text{جہ} - \text{عہ}) (\text{عہ} - \text{بیہ}) = 18$$

(دیکھو دفعہ ۴۲) - اس لئے

$$\sqrt{18} = \frac{\text{عہ} - \text{بیہ}}{3} = \text{عہ} - \text{بیہ} + \text{ا} - \text{ب}$$

(121)

اور اس لئے

$$\text{عہ} - \text{بیہ} + (\text{ا} - \text{ب}) = \sqrt{18} = \frac{\text{عہ} - \text{بیہ}}{3} + \text{ا} - \text{ب}$$

جو مطلوبہ ہم رسم ربط ہے۔ یہ مشابہ طلب ہے کہ اس مساوات کے سروں میں ایک غیر منطقی مقدار شامل ہے جس کی دوسری علامت سے اصلوں کے ایک مختلف زوج کے درمیان ہم رسم ربط حاصل ہوگا۔

۶۱۔ چار درجی کا پہلا جذروں کے ذریعہ - یہ لرا کا مفروضہ۔

فرض کرو کہ چار درجی مساوات

$$\text{ا} + \text{ا} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ج} + \text{د} + \text{د} = 0$$

کو شکل (دفعہ ۳۷)

$$\text{ا} + \text{ا} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ج} + \text{د} + \text{د} = 0$$

میں لکھا گیا ہے جہاں

سی = ا لا + ب ، ھ = ا ج - ب ۲ ،

$\text{ع} \equiv \text{د س} - \text{م ب د} + \text{ج}$

$$g = 3 - 1b + 2c$$

اس مساوات کو حل کر نیکیے لئے (جس میں دوسری رقم موجود نہیں ہے) یوں لرا ایک اصل کے لئے حسب ذیل عام جملہ مان لیتا ہے :-

$$y = \overline{y_1} + \overline{y_2} + \overline{y_3}$$

مربع لینے سے

ی۔ ف۔ ق۔ ر = (باقہار + ہار + ہاف + ہاف باقی)

پھر مریج لینے اور تحویل کرنے سے ہمیں مساوات حاصل ہوگی

ی-۲ (ف+ق+ر) ی-۸ می مک مک مک

$$+ (ف + ق + ر) - (ق + ر + ف + ق) = 0$$

اس مساوات کا مقابلہ قبل الذکر مساوات سے کیا جائے تو

$$ف + ق + ر = ۳ هـ \quad ق + ر + ف + ق = ۳ هـ \quad - \frac{۳}{۲}$$

$$\frac{g}{r} = \frac{r}{r^2} = \frac{1}{r}$$

اور اس لئے ف'ق'ر' مساوات

$$(1) \dots = \frac{g}{2} - t \left(\frac{e}{2} - 3h \right) + 3h^2 + t^2$$

کی اصلیں ہیں۔ یا چونکہ

— گ = $\frac{1}{2} \text{ ن } - \text{ ن } + \text{ ع}$ 'جے' (دفعہ ۳۷)

جہاں جے = ۱ ج س + ۲ ب ج د - ۱ د - س ب ا - ج ۳

علامتیں لگانی ہونگی کہ ان کا حاصل ضرب وہی علامت برقرار رکھ سکے جو اوپر کی مساوات سے متعین ہوتی ہے۔ اس طرح

$$\text{ماق} \text{ماق} \text{ماق} = \text{ماق} (-\text{ماق}) (-\text{ماق})$$

$$= (-\text{ماق}) \text{ماق} (-\text{ماق}) = (-\text{ماق}) (-\text{ماق}) \text{ماق}$$

مقداروں ماق، ماق، ماق کے وہ سب ممکن اجتماع ہیں جو

اس شرط کو پورا کرتے ہیں بشرطیکہ ماق، ماق، ماق پورے عمل میں وہی علامتیں برقرار رکھیں خواہ یہ علامتیں کچھ بھی ہوں۔ یہ بہر کیف علامت سے متعلق تمام شکوک کو ہم رفع کر سکتے ہیں اور یہی کی چار قیمتوں کو ایک واحد جبری ضابطہ سے بیان کر سکتے ہیں اور یہ اس طرح کہ می کی مفروضہ قیمت سے متذکرہ بالا ربط کے ذریعہ مقداروں ماق، ماق، ماق میں سے کسی ایک کو ساقط کر دیا جائے اور باقی دو مقداروں پر علامت کی کوئی قید نہ لگائی جائے۔ اس لئے می کے لئے جو جملہ ہے وہ ہو جانا ہے

(123)

$$y = \frac{g}{\text{ماق}^2} - \text{ماق} + \text{ماق}$$

یہ ضابطہ ایسا ہے جو ہر قسم کے ابہام سے پاک ہے کیونکہ اس سے

ی کی چار اور صرف چار قیمتیں حاصل ہوتی ہیں جبکہ ماق اور ماق کو دوسری

علامتیں لگا دی جائیں۔ ظاہر ہے کہ پہلی دو مقداروں کو جو علامتیں دی جائیں گی ان کے لحاظ سے تیسری رقم کے نسبت نما کی علامت متعین ہو جائیگی۔ بالآخر ف، ق اور ی کو ان کی وہ قیمتیں دینے سے جو اوپر حاصل کی گئی ہیں ہمیں حاصل ہوگا

$$\sqrt{ب^2 - ا ج} + \sqrt{ب^2 - ا ج} = ب + ب$$

٦

۲. ب-۲-۱ ج+۱ طم، ب-۲-۱ ج+۱ طم

جو چار درجی مساوات کا مکمل جبری حل ہے جس میں طہ اور طہ مساوات

$$m \cdot 10^3 - 10^3 = 2 + 10^3$$

کی اصلیں ہیں۔ چار درجے کے حل کی شکل کے متعلق یوں کہ مذکورہ بالا بظاہر اختیاری

مفروضہ جائز و درست ہے کیونکہ ہم دیکھتے ہیں کہ یں جو مساوات ہے اس کی دوسری رقم موجود نہ ہونے کی وجہ سے اس کی چار اصلوں کا مجموعہ صفر ہے

یعنی $y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n = 0$ اور اس لیے تفاعل $(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$ وغیرہ

جو عام طور پر تعداد میں چھپ ہو گئے (چار مفقاروں میں سے دو دو کے اجتماع)

اس صورت میں صرف تین ہیں۔ اس طرح ہم مان سکتے ہیں

$${}^{\circ}f = ({}_1y + {}_2y) = ({}_1y + {}_2y)$$

$${}^1C_n = ({}_n^1 + {}_n^2) = ({}_n^1 + {}_n^2)$$

$${}^1_1\text{H} = ({}^1_1\text{H} + {}^1_1\text{H}) = ({}^1_1\text{H} + {}^1_1\text{H})$$

جس سے ی، یام، ییہ، یما ضابطہ

$$r + \overline{q} + \overline{q}$$

میں شامل ہو جاتے ہیں۔

اب ہم یور کے کعبی (۱) کی اصلوں اور نیز محمول کعبی (۲) کی اصلوں کو (124)

لا میں دئے ہوئے چار درجی کی اصولوں 'عہ'، 'بہ'، 'جہ'، 'ضہ' کی رقوم میں بیان کرینگے۔ جذروں کی علامتوں کے متعلق جو باتیں اوپر بیان کی گئی ہیں ان کو پیش نظر رکھ کر ہم $ی \equiv لا + ب$ کی چار قیمتیں لکھ سکتے ہیں جو حسب ذیل ہیں:-

$$\begin{aligned} (۱) \quad 'ا' + ب &= ب - 'ا' - 'ا' - 'ا' \\ (۲) \quad 'ا' + ب &= ب - 'ا' + 'ا' - 'ا' - 'ا' \\ (۳) \quad 'ا' + ب &= ب - 'ا' - 'ا' + 'ا' - 'ا' \\ (۴) \quad 'ا' + ب &= ب + 'ا' + 'ا' + 'ا' \end{aligned}$$

جن سے پولر کے کعبی کی اصولوں 'ف'، 'ق'، 'ر' کے لئے حسب ذیل جملے فوراً اخذ کئے جاسکتے ہیں:-

$$\begin{aligned} (۱) \quad 'ف' &= \frac{۱}{۱۶} (ب + جہ - عہ - ضہ) \\ (۲) \quad 'ق' &= \frac{۱}{۱۶} (جہ + عہ - بہ - ضہ) \\ (۳) \quad 'ر' &= \frac{۱}{۱۶} (عہ + بہ - جہ - ضہ) \end{aligned}$$

مسواتوں (۳) میں سے دو دو مسواتیں لیکر عمل تفسیرتی سے اور 'ف'، 'ق'، 'ر' اور 'طہ'، 'طہ'، 'طہ' کے درمیان مندرجہ بالا رابطوں کو استعمال کرنے سے ہم بہ آسانی حسب ذیل کارآمد روابط حاصل کرتے ہیں جو کعبیوں (۱) اور (۲) کی اصولوں کے فرقوں کو چار درجی کی اصولوں کے فرقوں سے ملاتے ہیں:-

$$\begin{aligned} (۱) \quad 'ق' - 'ر' &= 'ا' (طہ - طہ) = 'ا' (بہ - جہ) (عہ - ضہ) \\ (۲) \quad 'ر' - 'ف' &= 'ا' (طہ - طہ) = 'ا' (جہ - عہ) (بہ - ضہ) \\ (۳) \quad 'ق' - 'ف' &= 'ا' (طہ - طہ) = 'ا' (عہ - بہ) (جہ - ضہ) \end{aligned}$$

بالآخر ان مساواتوں سے ربط $ط_۱ + ط_۲ + ط_۳ = ۰$ کے ذریعہ ہم
 $ط_۱، ط_۲، ط_۳$ کی قیمتیں ع، ب، جہ، ضہ کی رقوم میں اخذ کرتے ہیں:-
 $۱۲ ط_۱ = (جہ - عہ) - (بہ - ضہ) - (عہ - جہ) - (جہ - ضہ)$
 $۱۲ ط_۲ = (عہ - بہ) - (جہ - ضہ) - (بہ - جہ) - (عہ - ضہ)$
 $۱۲ ط_۳ = (بہ - جہ) - (عہ - ضہ) - (جہ - عہ) - (بہ - ضہ)$

(125)

مثالیں

- ۱۔ جب چار درجی کی دو اصلیں مساوی ہوں تو محمول کعبی کی دو اصلیں مساوی ہونگی اور بالعکس۔
- ۲۔ جب چار درجی کی تین اصلیں مساوی ہوں تو محمول کعبی کی سب اصلیں صفر ہونگی اور اس لئے $ع = ۰$ ، $ج = ۰$ ۔
- ۳۔ جب چار درجی مساوی اصلوں کے دو علیحدہ جوڑے لکھا جائے تو یو لے کے کعبی کی اصلیں صفر ہوتی ہیں اور اس لئے
 $گ = ۰$ ، $ا = ۰$ ، $ع = ۱۲$ ، $ھ = ۰$ ۔
- ۴۔ اصلوں کی نوعیت کے لحاظ سے چار درجی اور یو لے کے کعبی کے درمیان روابط ذیل ثابت کرو:-
 (۱) جب چار درجی کی تمام اصلیں حقیقی ہوں تو یو لے کے کعبی کی تمام اصلیں حقیقی اور مثبت ہونگی۔
 (۲) جب چار درجی کی تمام اصلیں خیالی ہوں تو یو لے کے کعبی کی تمام اصلیں حقیقی ہونگی جنہیں سے دو منفی اور ایک مثبت ہوگی۔
 (۳) جب چار درجی کی دو اصلیں حقیقی اور دو خیالی ہوں تو یو لے کے کعبی کی دو اصلیں خیالی اور ایک اصل مثبت اور حقیقی ہوگی۔
 یہ نتیجے مساواتوں (۴) سے بہ آسانی حاصل ہوتے ہیں اگر ق، ر کی قیمتوں میں ع، ب، جہ، ضہ کی بجائے مناسب شکلیں درج کی جائیں۔ یہ یاد رہے کہ یہاں تمام ممکن صورتیں بیان کر دی گئی ہیں اور چار درجی کے متعلق یہ فرض کیا گیا ہے کہ

اس کی اصلیں مملوئ نہیں ہیں۔ ان میں سے ہر مسئلہ کا عکس بھی درجہ پس جب یو لے کے کعبی کی تمام اصلیں حقیقی اور مثبت ہوں تو ہم یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ چار درجی کی تمام اصلیں حقیقی ہیں اور جب یو لے کے کعبی کی اصلیں منفی ہوں تو چار درجی کی تمام اصلیں خیالی ہیں اور جب یو لے کے کعبی کی اصلیں خیالی ہوں تو چار درجی کی دو اصلیں حقیقی اور دو اصلیں خیالی ہیں۔

۵۔ نہایت کم کہ چار درجی کی اصلوں اور محمول کعبی کی اصلوں کے درمیان حسب ذیل ربط موجود ہوتے ہیں :-

(۱) اگر چار درجی کی اصلیں سب کی سب حقیقی ہوں یا سب کی سب خیالی تو محمول کعبی کی سب اصلیں حقیقی ہونگی اور اس کے برعکس جب محمول کعبی کی سب اصلیں حقیقی ہوں تو چار درجی کی اصلیں یا تو سب کی سب حقیقی ہونگی یا سب کی سب خیالی۔

(۲) جب چار درجی کی دو اصلیں حقیقی اور دو اصلیں خیالی ہوں تو محمول کعبی کی دو اصلیں خیالی ہونگی اور اس کے برعکس جب محمول کعبی کی دو اصلیں خیالی ہوں تو چار درجی کی دو اصلیں حقیقی ہونگی اور دو اصلیں خیالی۔

یہ نتیجہ مثال اسبق سے فوراً اخذ ہو سکتے ہیں کیونکہ کعبیوں (۱) اور (۲) کی اصلوں کے درمیان ایک حقیقی خطی ربط موجود ہوتا ہے۔

۶۔ جب ربط مثبت ہو تو چار درجی خیالی اصلیں رکھیں گے۔

کیونکہ ایسی صورت میں یو لے کے کعبی کی سب اصلیں مثبت نہیں ہو سکتیں۔

۷۔ جب ربط منفی ہو تو چار درجی کی دو اصلیں حقیقی ہونگی اور دو اصلیں

خیالی۔

کیونکہ ایسی صورت میں محمول کعبی کی دو اصلیں خیالی ہونگی (مثال ۱۲ صفحہ ۱۸۴)

۸۔ جب ربط اور جے دونوں مثبت ہوں تو چار درجی کی تمام اصلیں خیالی

ہونگی۔

کیونکہ جب مثبت ہونے کی وجہ سے محمول کعبی کی ایک اصل حقیقی اور منفی ہوگی۔ اس لئے یو لے کے کعبی کی بھی ایک اصل حقیقی اور منفی ہوگی اس وجہ سے کہ ت = ا ط - ط اور ربط مثبت ہے۔ یہ مثال (۴) کی صورت (۲) ہے۔

اس ثبوت میں یہ مان لیا گیا ہے کہ پہلا سر Δ مثبت ہے۔ اگر جے کی بجائے Δ جے مسئلہ بالا میں درج کیا جائے تو اگر کسی علامت کی قید لگانا ضروری نہیں۔
۹۔ ثابت کرو کہ دو چار درجی مساواتوں

$$\Delta^2 + \Delta + 6 = \Delta^2 + \Delta + 4 = 0$$

کا محلول کبھی ایک ہی ہے۔

۱۰۔ دو چار درجی مساواتوں

$$\Delta^2 + \Delta + 8 = \Delta^2 + \Delta + 3 = 0 \quad \Delta^2 + \Delta + 3 = 0 \quad \Delta^2 + \Delta + 3 = 0$$

کا محلول کبھی معلوم کرو۔

$$\Delta^2 + \Delta + 3 = 0 \quad \Delta^2 + \Delta + 3 = 0 \quad \Delta^2 + \Delta + 3 = 0$$

۱۱۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$\Delta^2 + \Delta + 3 = 0 \quad \Delta^2 + \Delta + 3 = 0 \quad \Delta^2 + \Delta + 3 = 0$$

کی آٹھ اصلیں مضابطہ

$$\Delta^2 + \Delta + 3 = 0 \quad \Delta^2 + \Delta + 3 = 0 \quad \Delta^2 + \Delta + 3 = 0$$

(مثال ۲۰ صفحہ ۴۴ کے ساتھ مقابلہ کرو۔)

سے حاصل ہوتی ہیں۔

۱۲۔ اگر مساوات

$$\Delta^2 + \Delta + 3 = 0 \quad \Delta^2 + \Delta + 3 = 0 \quad \Delta^2 + \Delta + 3 = 0$$

کی ایک اصل

$$\Delta^2 + \Delta + 3 = 0 \quad \Delta^2 + \Delta + 3 = 0 \quad \Delta^2 + \Delta + 3 = 0$$

ہو تو $\Delta^2 + \Delta + 3 = 0$ کی رقوم میں $\Delta^2 + \Delta + 3 = 0$ جے معلوم کرو۔

$$\Delta^2 + \Delta + 3 = 0 \quad \Delta^2 + \Delta + 3 = 0 \quad \Delta^2 + \Delta + 3 = 0$$

۱۳۔ وہ ضابطے لکھو جو چاردرجی کی اصل کو خاص صورتوں ع = اور جے = میں بیان کریں۔

۱۴۔ اصولوں عہ، ہ، جہ، ضہ کی رقوم میں محول کیمی کی مدد سے ع اور جے کو بیان کرو۔
(دیکھو دفعہ ۲۷، مثالیں ۱۸، ۱۶)

۱۵۔ اصولوں عہ، ہ، جہ، ضہ کے فرقوں کے مربعوں کے حاصل ضرب کو ع اور جے کی رقوم میں بیان کرو۔

مندرجہ بالا مساواتوں (۵) اور مساوات (۲) صفحہ ۱۷۷ کی مدد سے ہم مطلوبہ حاصل ضرب حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} & \text{ا}^۲ (\text{ہ} - \text{ج}) (\text{جہ} - \text{عہ}) (\text{یہ} - \text{عہ}) (\text{ضہ} - \text{یہ}) (\text{تہ} - \text{جہ}) (\text{ضہ} - \text{جہ}) \\ & = ۲۵۶ (\text{ع} - ۲۷ \text{ جے}) \end{aligned}$$

۱۶۔ اصل کو بیان کرنیوالے جملہ میں آخری جذر المربع کی علامت میں (یعنی اُس علامت جذر میں جو محول کیمی کے حل میں جذر الکعب میں واقع ہوتا ہے) کوئی مقدار نہ جواب:۔ ۲۷ جے = ع

۱۷۔ ثابت کرو کہ چاردرجی مساوات

$$\text{ا}^۲ + \text{ا}^۲ + \text{ا}^۲ + \text{ا}^۲ + \text{ا}^۲ + \text{ا}^۲ + \text{ا}^۲ = ۰$$

کی مربع دار فرقوں کی مساوات کے سر، ا، ہ، ع اور جے کی رقوم میں بیان کئے جاسکتے ہیں۔

(127)

مساوات سے دوسری رقم خارج کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$۰ = \frac{\text{ا}^۲ - \text{ع} - ۳ \text{ا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ا}^۲ - \text{ا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ا}^۲ - \text{ا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ا}^۲ - \text{ا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ا}^۲ - \text{ا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ا}^۲ - \text{ا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ا}^۲ - \text{ا}}{\text{ا}}$$

اور اصولوں کی علامتیں بدلتے سے

$$۰ = \frac{\text{ا}^۲ - \text{ع} - ۳ \text{ا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ا}^۲ - \text{ا}}{\text{ا}} - \frac{\text{ا}^۲ - \text{ا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ا}^۲ - \text{ا}}{\text{ا}} - \frac{\text{ا}^۲ - \text{ا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ا}^۲ - \text{ا}}{\text{ا}} - \frac{\text{ا}^۲ - \text{ا}}{\text{ا}}$$

ان استخالوں سے تفاعلوں (عہ - یہ) ' وغیرہ پر کوئی اثر نہیں پڑتا لیکن موخر الذکر مساوات میں 'گ' ہو جاتا ہے اور اس کے دوسرے سر غیر متغیر رہتے ہیں۔ اس لئے مربع دار فرقوں کی مساوات کے سروں میں 'گ' صرف حقیقت قوتوں میں داخل ہو سکتا ہے۔ اور دفعہ ۳ کی متانکہ مساوات کی مدد سے 'گ' سا قہ کیا جاسکتا ہے اور 'ا'، 'ع'، 'ھ'، 'جے' داخل کئے جاسکتے ہیں۔ اسی طرح ہم ثبات کر سکتے ہیں کہ اصولوں (عہ - یہ) 'جے' کے فرقوں کا ہر حقیقت تفاعل 'ا'، 'ھ'، 'ع'، 'جے' کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے اور اس میں 'گ' طاق قوتوں میں داخل نہیں ہوتا۔

۶۲۔ جذروں کے ذریعہ چار درجی کا دوسرا حل۔ فرض کرو کہ

چار درجی مساوات

$$۱۱ + ۳ب + ۲ج + ۶ا + ۳د + لا + س = ۰$$

حسب سابق شکل

$$۱۱ + ۶ھ + ۲ی + ۳گ + ۱ع + ۳ھ = ۰$$

میں رکھی گئی ہے جہاں $ی = ۱۱ + لا + ب$

اس مساوات کی اصل کے لئے اب ہم جملہ

$$۱۱ = ۱۱ + ۶ھ + ۲ی + ۳گ + ۱ع + ۳ھ$$

فرض کرتے ہیں جس میں تین غیر تابع جذر 'ا'، 'ب'، 'د' شامل ہیں۔
دو مرتبہ مربع لینے سے اور تحویل کرنے سے

$$(۱۱ - ق - ر - ۲ف - ۲ق) = ۲(۲ف + ق + ۲ی + ۲ف + ق + ۲ر)$$

$$یا ۱۱ - ۲(ق + ر + ۲ف + ق) = ۲(۲ف + ق + ۲ی + ۲ف + ق + ۲ر)$$

$$+ (ق + ر + ۲ف + ق) = ۲(۲ف + ق + ۲ی + ۲ف + ق + ۲ر)$$

اس مساوات کا مقابلہ ی کی قبل الذکر مساوات کے ساتھ کیا

جائے تو

$$ق + ر + ف + ق = ۳ - ۲ = ۱ \quad گ$$

$$ف + ق + ر = ۱۲ - ۱۱ = ۱ \quad گ$$

جس سے ظاہر ہے کہ 'ق'، 'ر'، 'ف' مساوات
 ۲ گ ت + (۱۲ - ۱۱) ت = ۱۲ گ ت + ۱ گ ت = ۱۳ گ ت
 کی اصلیں ہیں۔

(128)

اس مساوات کو یہ آسانی پور کے کبھی میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔ یا بلا واسطہ

$$ت = \frac{۱۲}{۱۱ - ۱۲} = -۱$$

کے اندراج سے اور 'گ' کی بجائے اس کی قیمت 'ع'، 'جے' کی رقوم
 میں رکھنے سے ہم اس کو محول کبھی کی معیاری شکل یعنی شکل
 ۲ - ۱۲ طہ - ع ۱ طہ + جے = ۰
 میں تحویل کر سکتے ہیں۔

حل کے اس طریقہ میں ہمیں کسی ایسے ابہام سے جو دفعہ ۶۱ میں واقع
 ہوا تھا واسطہ نہیں پڑتا۔ کیونکہ 'ی' کی قیمت کے طور پر جو جملہ یہاں مان لیا گیا
 ہے اس کی صرف چار قیمتیں ہیں حالانکہ دفعہ ماضی میں 'ی' کے لئے جو
 مشکل اختیار کی گئی تھی اسکی آٹھ قیمتیں تھیں۔ یہ بات اسوجہ سے ہے کہ شامل
 ہونے والے جذر دوہری علامت رکھتے ہیں مثلاً مساوات

$$۲ (باق + بار + ہاف + ہاف)$$

$$= (ہاف + باق + بار) - ق - ر$$

سے یہ امر بالکل واضح ہے جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اس دفعہ کے جذری
 جملہ کی قیمتوں کی تعداد اتنی ہی ہے جتنی (ہاف + باق + بار) کی قیمتوں کی

یعنی چار۔

چار درجی کی اصلوں عہدہ، مضامہ کی رقوم میں فرق، رکوبیان کر نیکے لئے لاکو یہ چارہشتیں عہدہ، مضامہ دیئے سے

$$م = ا + ب = م - ن - ن - م - م$$

$$y = 1b + b = -\text{اق} + \text{ار} + \text{اف} - \text{اق}$$

$$y \equiv 1 + b = -f(r) - f + f(r) + f$$

$$ي = ا + ض + ب = اَ + اِ + اُ + قَ + قِ + قُ$$

طالب علم بہ آسانی اس امر کا اطمینان کر سکتا ہے کہ جذروں کی علامتوں کا
کوئی اور اجتماع ایسا نہیں ہے جس سے ان چار قیمتوں کے علاوہ کوئی مختلف
قیمت حاصل ہو۔

یہ + یہ - یہ - یہ اور یہ یہ - یہ یہ کی قیمتوں سے ہم حاصل کرتے ہیں

۱) (ب + ج - ع - ض) = ۴۱۰۰

ا(ب ج - ع هـ ضه) + ا ب (ا ب ج - ع - هـ ضه) = م ف ا ق ن ر

ان سے اور ان سے متشابہ مساواتیں استعمال کرنے سے ربط گ = ۲ ف ق ر (129) کے ذریعہ ہم 'ف'، 'ق'، 'ر' کو اصلوں 'عہ'، 'بہ'، 'جہ'، 'ضہ' کی رقوم میں حسب ذیل طریقوں پر بیان کر سکتے ہیں :-

$$-f = \frac{b - \frac{b}{\mu} - \frac{b}{\mu^2}}{b + \frac{b}{\mu} + \frac{b}{\mu^2}} = \frac{\mu^2 - \mu - 1}{\mu^2 + \mu + 1}$$

$$- ق = ۱ \frac{جمعه - پنجشنبه}{جمعه - چهارشنبه} + ب = \frac{۸ گ}{۱ (جمعه - پنجشنبه - چهارشنبه)}$$

۸ گ

$$-1 = \frac{عہ - ب - جہ - ضہ}{عہ + ب + جہ + ضہ} = \frac{ب}{ب + ج + د + ع + ح + ز + ه + گ}$$

۶۳۔ چار درجی کو دو درجی اجزائے ضربی میں تحلیل کرنا۔ فرض کرو کہ

چار درجی

۱ لا + ۲ ب + ۳ ج + ۴ د + ۵ لا + ۶ س
کو دو مربعوں کے فرق مثلاً کی شکل یعنی شکل

$$(۱ لا + ۲ ب + ۳ ج + ۴ د + ۵ لا + ۶ س) - (۲ د + ۳ ج + ۴ د + ۵ لا + ۶ س)$$

میں بیان کیا گیا ہے۔

دئے ہوئے چار درجی کو ۱ سے ضرب دو اور اس جملہ کے ساتھ اسکا
مقابلہ کر دو تو ذیل کی مساواتیں مقداروں 'ن' اور طہ کو متعین کر کے لے لی
حاصل ہو گئی۔

$$م = ب - ۲ ج + ۱ طہ، م ن = ب ج - ۱ د + ۲ ب طہ$$

$$ن = (ج + ۲ طہ) - ۱ س$$

ان مساواتوں سے م اور ن کو ساقط کر دو تو

$$۴ طہ - (۱ س - ۲ ب د + ۳ ج طہ) = ۱ طہ + ۲ ج س + ۳ ب ج د$$

$$- ۱ د - ۲ س ب - ۳ ج = ۰$$

جو وہی محمول کعبی ہے جسکو پہلے مصل کیا جا چکا ہے۔

۱۔ چار درجی کو دو مربعوں کے فرق میں تحلیل کرنا سب سے پہلا طریقہ تھا جو
درجہ چہارم کی مساوات کے حل کے لئے استعمال کیا گیا تھا۔ اصل کا یہ طریقہ فیہاری
(Ferrari) نے دریافت کیا تھا۔ اگرچہ یک بعض مصنف اس کو سیمپسن (Simpson)

سے منسوب کرتے ہیں۔ (دیکھو نوٹ ۱)۔

دفعہ آئندہ میں جو طریقہ بیان کیا گیا ہے اس میں چار درجی کو بالراست دو درجی اجزاء
کے حاصل ضرب کے مساوی رکھا گیا ہے۔ یہ طریقہ ویکارٹ کا طریقہ ہے۔

(130)

اس مساوات سے طہ کی تین قیمتیں (طہ^۱، طہ^۲، طہ^۳) ملتی ہیں جن کے جواب میں مہ، مہن، ن کی تین قیمتیں ملیں گی۔ پس چار درجہ کی مفروضہ شکل کے تمام سر تین جداگانہ طریقوں سے بنائے جاتے ہیں۔ مزید بریں یہ ظاہر ہے کہ ہر قیمت کے جواب میں ن کی ایک اہم قیمت بنتی ہے کیونکہ

$$\text{مہن} = \text{ب ج} - \text{د د} + \text{ا ب طہ}$$

چار درجہ

$$(\text{ا لا} + \text{ب لا} + \text{ج} + \text{ا طہ}) - (\text{۲ م لا} + \text{ن})$$

کو ضرب کیا دو درجہ کا جبری اجزائے ضربی

$$\text{ا لا} + \text{ب لا} + \text{ج} + \text{ا طہ} - \text{۲ م لا} - \text{ن}$$

$$\text{ا لا} + \text{ب لا} + \text{ج} + \text{ا طہ} + \text{۲ م لا} + \text{ن}$$

یعنی

$$\text{ا لا} + \text{۲ (ب - م) لا} + \text{ج} + \text{ا طہ} - \text{ن}$$

$$\text{ا لا} + \text{۲ (ب + م) لا} + \text{ج} + \text{ا طہ} + \text{ن}$$

اور میں تحلیل کیا جاسکتا ہے۔ اگر طہ کو اس کی تین قیمتیں طہ^۱، طہ^۲، طہ^۳ دیا جائے تو ابتدائی چار درجہ کے دو درجہ کے اجزائے ضربی کے تین زوج حاصل ہوتے ہیں اور مسئلہ بالکل حل ہو جاتا ہے۔

اس حل اور جذروں والے حل میں جو تعلق ہے اسکو واضح کر نیکی لے فرض کرو کہ مندرجہ بالا ترتیب میں لکھے ہوئے دو درجہ کے اجزائے ضربی کی اصلیں یہ، جہ اور عہ، ضہ ہیں اور یہ کہ دو درجہ کے اجزائے بقیہ زوجوں کی اصلیں اسی طرح جہ، عہ اور بہ، ضہ، عہ اور جہ، ضہ ہیں تو

$$\text{بہ} + \text{جہ} = \frac{۲}{۱} (\text{ب} - \text{م})، \text{جہ} + \text{عہ} = \frac{۲}{۱} (\text{ب} - \text{م})، \text{عہ} + \text{بہ} = \frac{۲}{۱} (\text{ب} - \text{م})$$

$$\text{عہ} + \text{ضہ} = \frac{۲}{۱} (\text{ب} + \text{م})، \text{بہ} + \text{ضہ} = \frac{۲}{۱} (\text{ب} + \text{م})، \text{جہ} + \text{ضہ} = \frac{۲}{۱} (\text{ب} + \text{م})$$

جہاں

$$\sqrt[3]{\text{م}^3 - \text{ب}^3 - \text{راج} + \text{لا}^3 \text{ط}^3} = \sqrt[3]{\text{م}^3 - \text{ب}^3 - \text{راج} + \text{لا}^3 \text{ط}^3}$$

$$\sqrt[3]{\text{م}^3 - \text{ب}^3 - \text{راج} + \text{لا}^3 \text{ط}^3} = \text{م}^3$$

ان آخری مساواتوں میں سے دو دو مساواتیں لیکر ایک کو دوسرے میں سے تفریق کیا جائے تو

$$\text{ب} + \text{ج} - \text{ع} - \text{ضہ} = \frac{\text{م}^3}{\text{لا}} \quad \text{ج} + \text{ع} - \text{ب} - \text{ضہ} = \frac{\text{م}^3}{\text{لا}}$$

$$\text{ع} + \text{ب} - \text{ج} - \text{ضہ} = \frac{\text{م}^3}{\text{لا}}$$

اور چونکہ

$$\text{ع} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ضہ} = \frac{\text{م}^3}{\text{لا}}$$

اسلئے

$$\text{ا} + \text{ع} + \text{ب} = \text{م}^3 + \text{م}^3 + \text{م}^3 - \text{م}^3$$

$$\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} = \text{م}^3 - \text{م}^3 + \text{م}^3 + \text{م}^3$$

$$\text{ا} + \text{ج} + \text{ب} = \text{م}^3 + \text{م}^3 - \text{م}^3 - \text{م}^3$$

$$\text{ا} + \text{ضہ} + \text{ب} = \text{م}^3 - \text{م}^3 - \text{م}^3 - \text{م}^3$$

اس لئے یہ معلوم ہوتا ہے کہ چار درجی کی اصلیں یہاں ایسے ضابطوں

(131)

سے علیحدہ علیحدہ بیان ہوئی ہیں جو دفعہ ۶۱ کے ضابطوں کے مماثل ہیں۔

۴ کی قیمتیں یعنی ۴، ۴، ۴، ۴ فی الحقیقت یولر کے کعبی کی اصلوں

کے مماثل ہیں۔ نیز ۴، ۴، ۴، ۴ میں شامل ہونے والے جذروں کی

علامتوں پر ایسی قید موجود ہے جو دفعہ ۶۱ میں عالم کردہ قید کے مشابہ ہے۔ کیونکہ دو درجی اجزائے ضربی کی اصلوں کے لحاظ سے جو مفروضات اوپر تسلیم کئے گئے ہیں

ان کی وجہ سے ہمیں مساوات

لا (ب + جہ - عہ - ضہ) (جہ + عہ - بہ - ضہ) (عہ + بہ - جہ - ضہ) = ۶۴ م م م م
 ملتی ہے جو ربط ذیل کو مستلزم ہے (دیکھو مثال ۲۰ صفحہ ۷۲)

$$م م م = \frac{۱}{۲} گ$$

اور اس ربط کے ذریعہ م م م کی علامتیں مفید ہوتی ہیں جیسا کہ
 دفعہ سابق میں واضح کیا جا چکا ہے۔

اس آخری مساوات کی مدد سے ہم م کو اصلوں کے جلوں سے
 ساقط کر سکتے ہیں اور اس طرح چار درجی کی سب اصلوں کو (جیسا کہ دفعہ ۶۱
 میں کیا گیا) ایک واحد ضابطہ میں یعنی

$$لا + ب = م + م - \frac{گ}{م م م}$$

میں حاصل کرتے ہیں جس میں جذور

$$م = \sqrt[۴]{ب - ا ج + لا ط م} \text{ اور } م = \sqrt[۴]{ب - ا ج + لا ط م}$$

پوری عمومیت کے ساتھ لئے گئے ہیں۔

مشالیں

۱۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اعلیں لہ مہ نہ ہوں یعنی

بہ جہ + عہ ضہ + جہ عہ + بہ ضہ + جہ ضہ

چار درجی کے دو درجی اجزائے ضربی کے آخری سروں کو جمع کرنے سے

$$بہ جہ + عہ ضہ = ۴ ط م + \frac{ج}{۱}$$

$$جہ عہ + بہ ضہ = ۴ ط م + \frac{ج}{۱}$$

$$عہ بہ + جہ ضہ = ۴ ط م + \frac{ج}{۱}$$

جہاں $ط^۱$ ، $ط^۲$ ، $ط^۳$ محول کعبی کی اصلیں ہیں۔ پس مطلوبہ مساوات حاصل ہو جاتی (دیکھو دفعہ ۳۹، مثالیں ۴، ۵)۔

جواب :- (۱۱-ج^۲) - ۴ع (۱۱-ج^۲) + ۱۶ج^۲ = ۰
۲ - مثال ماضی کی مساواتوں کے ذریعہ محول کعبی کی اصلوں کو چار درجی کی اصلوں کی رقوم میں بیان کرو۔

(182)

ج^۲ کی بجائے اسکی قیمت عہ، بہ، جہ، ضہ کی رقوم میں درج کرنے سے فوراً معلوم ہوتا ہے کہ

$$۱۲ ط^۱ = ۲ - ۴ - ۴ - ۴ \equiv (جہ - عہ) (بہ - ضہ) - (عہ - بہ) (جہ - ضہ)$$

$$۱۲ ط^۲ = ۲ - ۴ - ۴ - ۴ \equiv (عہ - بہ) (جہ - ضہ) - (بہ - جہ) (عہ - ضہ)$$

$$۱۲ ط^۳ = ۲ - ۴ - ۴ - ۴ \equiv (بہ - جہ) (عہ - ضہ) - (جہ - عہ) (بہ - ضہ)$$

۳ - مثال (۱) میں $ط^۱$ ، $ط^۲$ ، $ط^۳$ کے لئے جو جملے حاصل ہوئے ہیں ان کے ذریعہ دفعہ ۶۱ مثال ۵ کے ان نتیجوں کی تصدیق کرو جن سے چار درجی اور محول کعبی کی اصلیں مربوط ہوتی ہیں۔

۴ - وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں ہوں

$$\frac{۱}{۲} (بہ - جہ - عہ - ضہ) + (بہ + جہ - عہ - ضہ) \frac{۱}{۲} (جہ - عہ - بہ - ضہ) + (جہ + عہ - بہ - ضہ) \frac{۱}{۲} (عہ - بہ - جہ - ضہ)$$

$$\frac{۱}{۲} (عہ - بہ - جہ - ضہ) + (عہ + بہ - جہ - ضہ) \frac{۱}{۲} (جہ - عہ - بہ - ضہ)$$

چار درجی کے دو درجی اجزاء ضربی سے ہم معلوم کرتے ہیں

$$\frac{۴}{۱} = ۱ + بہ + جہ - عہ - ضہ - \frac{۱}{۱} (۲) = ۱ + بہ + جہ - عہ - ضہ$$

$$ص ۱ = ۱ + جہ - ۱ + ۲ + ۲ + ۲ = ۱ + ۴$$

جہاں مطلوبہ کعبی کی اصلیں $فہ$ ، $فہ$ ، $فہ$ سے تعبیر کی گئی ہیں۔

اس لئے ہم مطلوبہ مساوات محول کعبی کے ایک خطی استحالہ سے حاصل کرتے ہیں۔

جواب :- (۱۱ + جہ - ۱) - ۲ع (۱۱ + جہ - ۱) - ۲ب (۱۱ + جہ - ۱) = ۰

۵۔ وہ مساوات بناؤ جسکی صلیں ہیں

$$\begin{array}{r} \text{بہ جہ - عہ ضہ} \quad \text{جہ عہ - بہ ضہ} \quad \text{جہ بہ - جہ ضہ} \\ \hline \text{بہ + جہ - عہ ضہ} \quad \text{جہ + عہ - بہ ضہ} \quad \text{عہ + بہ - جہ ضہ} \end{array}$$

اگر فہ ان میں سے کسی تفاعل کو بلا امتیاز تعبیر کرے اور اس کے جواب میں محمول کبھی کی اصل طہ سے تعبیر ہو تو پچھلے نتیجوں کو استعمال کرنے سے

$$\text{۲ فہ} = \frac{\text{۵ د}}{\text{ب}^۲ - \text{۲ ج} - \text{۱ د} + \text{۲ ب طہ}}$$

اور اسلئے ہم مطلوبہ مساوات محمول کبھی کے ایک ہم رسم احتمال سے حاصل کرتے ہیں۔ اس ضابطہ کو زیادہ سہولت بخش شکل

$$\frac{\frac{۱}{۱} \text{گ}}{\text{۱ طہ} - \text{۵ د}} = \text{۲ فہ} + \text{ب}$$

میں رکھا جاسکتا ہے جسکے ذریعہ مطلوبہ کبھی شکل ذیل میں حاصل ہوتا ہے:-

$$\text{۲ گ} (\text{۲ فہ} + \text{ب}) + (\text{۱ د} - \text{ع} - \text{۱۲ د}) (\text{۱ فہ} + \text{ب})$$

$$- \text{۶ گ} (\text{۱ فہ} + \text{ب}) - \text{گ} = ۰$$

جس کو پھیلا کر ۱ سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{۲ گ فہ} + (\text{۱ د} + \text{ب} - \text{ج} - \text{۱ د} + \text{۲ ج} + \text{۲ ب د}) + \text{۲ ب د} + \text{۲ ب د} - \text{۱ د} = ۰$$

(دیکھو مثال ۱۲ صفحہ ۱۲)

۶۔ وہ مساوات بناؤ جسکی صلیں ہیں

$$\begin{array}{r} \frac{۱}{۴} (\text{بہ جہ - عہ ضہ}) \quad \frac{۱}{۴} (\text{جہ عہ - بہ ضہ}) \quad \frac{۱}{۴} (\text{عہ بہ - جہ ضہ}) \\ \hline \frac{۱}{۴} (\text{بہ جہ - عہ ضہ}) \quad \frac{۱}{۴} (\text{جہ عہ - بہ ضہ}) \quad \frac{۱}{۴} (\text{عہ بہ - جہ ضہ}) \end{array}$$

یہ ۱ کی تین قیمتیں ہیں دیکھو دفعہ ۶۳۔ پہلے کی طرح انہیں سے کسی قیمت کو فہ سے تعبیر کیا جائے تو مطلوبہ مساوات محمول کبھی سے ہم رسم احتمال

$$\frac{2\text{ ب ج د} - 1\text{ د} - 3\text{ س یا} + 4\text{ ب د ط}}{\text{ج} - 1\text{ ط}} = \text{ف}$$

کے ذریعہ حاصل ہو سکتی ہے۔
۶۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں ہیں

$$\frac{4}{\text{ب ج د} - 1\text{ د} - 3\text{ س یا} + 4\text{ ب د ط}} = \frac{4}{\text{ج} - 1\text{ ط}}$$

(۴ + ۲) ج - ۴ د - ۱۲ س + ۱۶ ب + ۱۶ ط = ۴ ج - ۴ د - ۱۲ س + ۱۶ ب + ۱۶ ط
مطلوبہ مساوات محول کبھی سے ہم رکھ استعمال

$$\frac{2\text{ ب ج د} - 1\text{ د} - 3\text{ س یا} + 4\text{ ب د ط}}{\text{ج} - 1\text{ ط}} = \text{ف}$$

کے ذریعہ حاصل ہوتی ہے۔

اس نتیجہ کو مثال ۵ سے اخذ کیا جاسکتا ہے وہ اس طرح کہ اصلوں کو ان کے
تکافیوں میں تبدیل کیا جائے اور اس تبدیلی کے جواب میں سروں میں تبدیلیاں
عمل میں لائی جائیں۔

۶۱۲۔ چار درجی کو دو درجی اجزائے ضربی میں تحلیل کرنا۔ دوسرے طریقہ

فرض کرو کہ چار درجی

$$1\text{ لا} + 2\text{ ب لا} + 3\text{ ج لا} + 4\text{ د لا} + 5\text{ س}$$

کو دو درجی اجزائے ضربی

$$1\text{ (لا} + 2\text{ ف لا} + 3\text{ ق)} \text{ (لا} + 2\text{ ث لا} + 3\text{ ق)}$$

میں تحلیل کیا گیا ہے۔ ان دو شکلوں کا مقابلہ کرنے سے

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ف} + \text{ف} = 2 \\ \text{ف} + \text{ق} + \text{ق} + \text{ق} + \text{ق} = 2\text{ ف} + 3\text{ ق} \\ \text{ف} + \text{ق} + \text{ق} = 2\text{ ق} + 3\text{ ق} = 5\text{ ق} \end{array} \right. \dots\dots\dots (1)$$

اب اگر ہمارے پاس شکل

فا (ف، ق، ف، ق) = فہ
کی کوئی پانچویں مساوات ہوتی تو ہم ف، ق، ق کو ملاحظہ کر سکتے
اور اس طرح ایسی مساوات معلوم کر سکتے جس سے فہ کی مختلف قیمتیں حاصل
ہو سکتیں۔

اس پانچویں مساوات کا ف، ق = فہ یا ق، ق = فہ ہونا مان لیا جا
سکتا ہے جہاں ہر صورت میں فہ ایک کبھی مساوات سے معلوم ہو گا کیونکہ اگر اس
ہر تفاعل کی صرف تین قیمتیں حاصل ہوتی ہیں جبکہ ان کو چار درجی کی اصولوں کی رقم میں
بیان کیا جاتا ہے۔ لیکن یہ فرض کرنا کہ

$$فہ = \frac{ج}{۱} - ف = \frac{۱}{۲} (ق + ق) - \frac{ج}{۱}$$

زیادہ سہولت بخش ہے۔ ف، ق، ق کے یہ دو تفاعل مساواتوں (۱)
میں سے دوسری مساوات کی رُو سے مساوی ہیں۔ ان مساواتوں کی مدد سے
ہم بہ آسانی یہ معلوم کرتے ہیں کہ

$$ف، ق + ف، ق = \frac{۲}{۱} ج - \frac{۲}{۳} ج + \frac{۸}{۱} ج$$

اور متماثل ربط

$$(ف + ف) (ق + ق) = (ف - ف) (ق - ق) + (ف، ق + ف، ق)$$

کے ذریعہ ف، ق، ق کو ملاحظہ کرنے سے مساوات

$$۴ فہ - ۲ ج = ۲ ج + ج = ۰$$

برآمد ہوتی ہے جو وہی محول کبھی ہے جسے حل کے پچھلے طریقوں سے حاصل کیا گیا تھا۔
اس طریقہ سے ف، ق، ق کو معلوم کرنے کے بعد ہم مساواتوں
(۱) کے ذریعہ چار درجی کو اجزائے ضربی میں تحلیل کر نیلے عمل کی تکمیل کر سکتے ہیں۔
پانچویں مساوات کی شکل کے متعلق جو مفروضہ ہم نے اوپر اختیار کیا
ہے اس کی وجہ ظاہر ہے۔ فہ کی مفروضہ قیمتوں کا دفعہ ۳۶ مثال (۱) کی

مساواتوں کے ساتھ مقابلہ کیا جائے تو یہ معلوم ہو گا کہ فہ وہی ہے جو طہ دفعہ سابق میں تھا۔ اور اس لئے ہم یہ پیش بینی کرتے ہیں کہ ف، ق، ت کے اسقاط سے فہ میں ایسی مساوات حاصل ہونی چاہئے جو حاصل کردہ محمول کبھی کے مماثل ہو۔ عام طور پر اگر فہ سے ل، مہ، نہ کے فرقوں کا کوئی تفاعل تبصیر ہو جس کا لازمی نتیجہ یہ ہو گا کہ اس سے عہ، بد، جہ، ضہ کے فرقوں کا ایک جفت تفاعل تبصیر ہو گا (دیکھو دفعہ ۲۷، مثال ۱۸) تو وہ مساوات جس کی اصلیں فہ کی مختلف قیمتیں ہوں ایسی ہوگی کہ اس کے سر، ا، ہ، ع، اور ج کے تفاعل ہونگے۔

اگر فہ حسب ذیل مثالوں میں سے دوسری مثال کے جملوں میں سے کسی ایک کے مساوی فرض کیا جائے تو فہ میں وہ مساوات جسکی اصلیں اس جملہ کی مختلف قیمتیں ہوں حسب شرح بالا ف، ت، ق، ت کے اسقاط کرنے سے حاصل ہوگی۔

مثالیں

(135)

$$۱ - ی + ۶ ہ + ی + ۲ گ + ی + ۲ ع - ۳ ہ$$

کو دو درجی اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔
اس شکل کا حاصل ضرب

$$(ی + ۲ ف + ی + ق) (ی - ۲ ف + ی + ق)$$

کے ساتھ مقابلہ کرو تو ف کے لئے حسب ذیل مساوات ملیگی:-

$$۲ ف + ۱۲ ہ + ۲ ف + ۱۲ (ہ - ۲ ع) - ۲ گ = ۰$$

(دیکھو دفعہ ۶۱)

$$۱ ف = ۵ + ۲ ہ = \frac{۱}{۲} (ق + ق - ۵۲)$$

رکھنے سے یہ مساوات، $۱^۲$ سے تقسیم کر نیکیے بعد، ہو جائیگی

$$۴۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۲۱۳۱۴۱۵۱۶۱۷۱۸۱۹۲۰ = ۰$$

۲۔ اگر ایک چار درجی جملہ کو دو درجی اجزائے ضربی

$$۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۲۱۳۱۴۱۵۱۶۱۷۱۸۱۹۲۰$$

میں تحلیل کیا جائے تو ثابت کرو کہ (۱) $۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۲۱۳۱۴۱۵۱۶۱۷۱۸۱۹۲۰$ سے حاصل ہوتا ہے جبکہ وہ تمام ایسی ممکن نمیتیں اختیار کرے جو حسب ذیل نمونوں میں سے ہر ایک کے متناظر ہیں:-

$$\frac{۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۲۱۳۱۴۱۵۱۶۱۷۱۸۱۹۲۰}{۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۲۱۳۱۴۱۵۱۶۱۷۱۸۱۹۲۰} = \frac{۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۲۱۳۱۴۱۵۱۶۱۷۱۸۱۹۲۰}{۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۲۱۳۱۴۱۵۱۶۱۷۱۸۱۹۲۰}$$

(د) $۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۲۱۳۱۴۱۵۱۶۱۷۱۸۱۹۲۰$ اور (۲) $۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۲۱۳۱۴۱۵۱۶۱۷۱۸۱۹۲۰$ سے حاصل ہوتا ہے جبکہ وہ تمام ایسی نمیتیں اختیار کرے جو

$$۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۲۱۳۱۴۱۵۱۶۱۷۱۸۱۹۲۰$$

کے متناظر ہیں۔

ان تفاضلوں کو اصولوں کی رقوم میں بیان کرنے سے ہر تفاعل کی ممکن قیمتوں کی تعداد معلوم ہوتی ہے۔

۶۵۔ چار درجی کا متکافی شکل میں استحالہ۔ اس استحالہ کو عمل میں

لانیکیے لئے ہم مساوات

$$۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۲۱۳۱۴۱۵۱۶۱۷۱۸۱۹۲۰ = ۰$$

جہاں

$$۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۲۱۳۱۴۱۵۱۶۱۷۱۸۱۹۲۰ = ۰$$

(دیکھو دفعہ ۳۵)۔ اگر یہ مساوات متکافی ہو تو ک اور س معلوم کر نیکی لے
ہیں دو مساواتیں ملتی ہیں یعنی

$$ا^۲ ع^۲ = ع^۲ ک^۲ = ک^۲ ع^۲$$

ک کو ساقط کرنے سے س کے لئے حسب ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے

$$ا^۲ ع^۲ - ع^۲ ع^۲ = -$$

اور چونکہ

$$ک^۲ = ع^۲ = \frac{ا^۲ س^۲ + ۳ ب س^۲ + ۳ ج س + د}{}$$

اس لئے س کی ہر قیمت کے جواب میں ک کی دو قیمتیں مساوی مگر مختلف
ہیں۔

مساوات

$$ا^۲ ع^۲ - ع^۲ ع^۲ = -$$

کو جب اندراجات (دفعات ۳۶، ۳۷)

$$ا^۲ ع^۲ = ع^۲ + ۳ ع^۲ + ۳ ع^۲ + گ^۲$$

$$ا^۲ ع^۲ = ع^۲ + ۳ ع^۲ + ۳ ع^۲ + گ^۲ - ع^۲ - ۳ ع^۲$$

کے ذریعہ تحویل کیا جائے تو وہ ہو جاتی ہے

$$۲ گ^۲ + (ا^۲ ع^۲ - ع^۲ - ۳ ع^۲ - گ^۲) = ۰ \quad (۱)$$

جو ایک کبھی مساوات ہے جس سے $ا^۲ ع^۲ = ۱ + ب$ کی تعیین ہوتی ہے
اور اگر ہم رکھیں

$$\frac{ا^۲ گ^۲}{ا^۲ ع^۲ - ۳ ع^۲} = ۱ + ب$$

تو معیاری تحول کبھی

$$۴ \text{ ر } ۳ \text{ ط} - ع \text{ ر } ط + جے = ۰$$

سے طہ متعین ہو جاتا ہے۔
اس استحالہ کو چار درجی کے حل کرنے میں استعمال کیا جاسکتا ہے اور یہ یاد رکھنا ضروری ہے کہ کعبی (۱) جو یہاں پیش ہوا ہے دفعہ ۶۲ کے کعبی سے صرف اتقدر فرق رکھتا ہے کہ اس کی اصلیں اس کی اصلوں سے مختلف العلامیں ہیں۔

اب ہم ک اور سا کو چار درجی کی اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ کی رقوم میں بیان کریں گے۔ چونکہ ما کی مسادات جو لا = ک + ما + سا رکھنے سے حاصل ہوئی ہے، متکافی ہے اسلئے اسکی اصلیں شکل ما، لم، ا، ا کی ہیں۔ پس ہم لکھ سکتے ہیں

$$عہ = ک + ما + سا، بہ = ک + لم + سا، جہ = ک + ا + سا$$

$$ضہ = ک + ا + سا$$

اور اس لئے

(137)

$$(عہ - سا) (ضہ - سا) = (بہ - سا) (جہ - سا) = ک^۲$$

جس سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$ک^۲ = \frac{بہ + جہ - عہ - ضہ}{بہ + جہ - عہ - ضہ} (جہ - عہ) (بہ - ضہ) (عہ - جہ) (ضہ - بہ)$$

اور

۱۔ چار درجی مسادات کو متکافی شکل میں تحلیل کر کے حل کرنیکا یہ طریقہ سٹر ایس۔ ایس گریٹ ہیڈ (S. S. Great head) نے کیمبرج ریختہ یا میکس جرنل جلد اول میں بیان کیا ہے۔

عہ، ہ، جہ، ضہ کی رقوم میں معلوم کر سکتے ہیں اور اس طرح ان نتیجوں کی مزید تصدیق جو ابھی ثابت ہوئے ہیں حسب ذیل طریقہ پر کرتے ہیں۔
چونکہ نظام [ف ب ف ج] اور [ف ا ف د] موسیقی ہیں
اسلئے

$$\frac{1}{ف ا} + \frac{1}{ف ب} = \frac{1}{ف ج} + \frac{1}{ف د}$$

اور اگر ف ا یا ف ب کا فاصلہ ثابت مہد او سے لا ہو تو

$$\frac{1}{لا - ضہ} + \frac{1}{لا - عہ} = \frac{1}{لا - جہ} + \frac{1}{لا - ہہ}$$

اس مساوات کو حل کرنے سے

$$لا = \frac{ہہ جہ - عہ ضہ \pm (جہ - عہ)(ہہ - ضہ)(عہ - جہ)}{ہہ + جہ - عہ - ضہ}$$

یا لا = صا ± ک

$$\frac{وفا + وفب}{2} = صا$$

$$ک = \pm \frac{وفا - وفب}{2}$$

مثال

کبھی

$$لا + ۳ ب لا + ۳ ج لا + د$$

کو متکافی شکل میں تحویل کرو۔

$$لا = ک ما + صا فرض کرنے سے مساوات$$

$$- گ ع^۲ + ۳ ع^۲ + ۵ = ۰$$

حاصل ہوتی ہے جہاں $ع^۲ = ۱ + ۳ ب -$

س کی قیمتیں یہ آسانی حاصل ہوتی ہیں

$$\begin{array}{l} \text{بہ جب} - ع^۲ = ۱ \text{ جب } ع = ۲ \text{ بہ} - ع^۲ = ۲ \text{ جب} \\ \text{بہ} + \text{جب} - ع^۲ = ۲ \text{ جب} + ع^۲ = ۲ \text{ بہ} + ع^۲ = ۲ \text{ جب} \end{array}$$

اس صورت میں ہندسی تعبیر یہ ہے کہ اگر محور پر تین نقطے 'ا' 'ب' 'ج' لئے جائیں اس طور پر کہ 'ب' اور 'ج' کے لحاظ سے 'ا' کا موسیقی مزدوج (دوہوا) 'ج' اور 'ا' کے لحاظ سے 'ب' کا 'ب' 'ا' اور 'ب' کے لحاظ سے 'ج' کا 'ج' تو س اور ک کی قیمتیں حسب ذیل ہونگی :-

$$۱ = ۱ + ۱ = ۱، ۱ - ۱ = ۰$$

ع، یہ، جب کی رقوم میں 'ا'، 'ب'، 'ج' کی قیمتوں کے لئے دیکھو
مثال ۱۳ صفحہ (۱۲۴) -

۶۶۔ اصولوں کے متشاكل تفاعلوں سے چار درجی کا حل -

(139)

اس طریقہ سے چار درجی کے حل کو ایک کبھی کے حل میں تحویل کرنا اُسوقت ممکن ہے جب چار اصولوں ع، بہ، جب، ضہ کے ایسے تفاعل بنانا ممکن ہو جو صرف تین قیمتیں قبول کریں اگر اصولوں کو باہم دگر ہر طرح ایک دوسری جگہ بدل دیا جائے۔ دفعہ ۶۴ مثال ۲ کے حوالہ سے یہ معلوم ہو گا کہ اس نوعیت کے مختلف تفاعل وجود رکھتے ہیں۔ یہ تفاعل دفعہ ۵۹ کے مائل تفاعلوں کی طرح یہ خاصیت رکھتے ہیں کہ تین تین کے کوئی ایسے دو جٹ اس طور پر موط ہوتے ہیں کہ کسی جٹ کا کوئی ایک تفاعل دوسرے جٹ کے ایک تفاعل کے ساتھ سروں کی رقوم میں ایک منطق ہم رسم ربط رکھتا ہے۔ اس سلسلہ کو آئندہ ثابت کیا جائیگا۔

موجودہ حل کے مقاصد کو پیش نظر رکھ کر ہم وہ تفاعل استعمال کرتے ہیں

جن کا حوالہ دفعہ ۵۵ میں دیا گیا ہے کیونکہ ان سے بالراست چاردرجی کی اصولوں کیلئے
چلے سروں کی رقوم میں حاصل ہوتے ہیں۔ اس لئے اب ہم وہ مسادات بنائیں گے
جسکی اصلیں

$$ت \equiv \left(\frac{عہ + طہ + بہ + طہ^۲ + ضہ^۲}{۲} \right)$$

کی تین قیمتیں ہوں جبکہ اصولوں کا ہر طرح ایک دوسرے کے ساتھ متبادل کیا
جائے اور طہ = ۱ -

یہ قیمتیں ہیں

$$ت_۱ \equiv \left(\frac{بہ + جہ - عہ - ضہ^۲}{۲} \right), ت_۲ \equiv \left(\frac{جہ + عہ - بہ - ضہ^۲}{۲} \right)$$

$$ت_۳ \equiv \left(\frac{عہ + بہ - جہ - ضہ^۲}{۲} \right)$$

اور چونکہ

$$(بہ + جہ - عہ - ضہ^۲) \equiv ۳ (عہ^۲ + لہ^۲ - مہ^۲ - نہ^۲)$$

$$۳ (عہ - بہ) \equiv ۳ (عہ^۲ - لہ^۲ - مہ^۲ - نہ^۲) = ۳۸ \frac{ھ}{۲۱}$$

اسلئے ت_۱، ت_۲، ت_۳ کی قیمتیں حسب ذیل حاصل ہوتی ہیں

$$\frac{لہ^۲ - مہ^۲ - نہ^۲}{۱۲} - \frac{ھ}{۲۱}, \frac{مہ^۲ - نہ^۲ - لہ^۲}{۱۲} - \frac{ھ}{۲۱}, \frac{نہ^۲ - لہ^۲ - مہ^۲}{۱۲} - \frac{ھ}{۲۱}$$

$$جس سے ت_۱ + ت_۲ + ت_۳ = ۳ - \frac{ھ}{۲۱}$$

پھر چونکہ

(140)

$$۳ (۲ مہ - نہ - لہ) (۲ نہ - لہ - مہ) = ۳ (لہ^۲ + مہ^۲ + نہ^۲ - نہ^۲ - لہ^۲ - مہ^۲) = ۳ (۲ مہ - نہ - لہ) (۲ نہ - لہ - مہ) = ۳ (۲ مہ - نہ - لہ) (۲ نہ - لہ - مہ)$$

$$اور ۳ (۲ مہ - نہ - لہ) = ۲۲ \frac{ع}{۲۱}$$

اسلئے

$$ستہ تہ + ستہ تہ + ستہ تہ + ستہ تہ = \frac{۱}{۹۶} - \frac{۲}{۹۶} = \frac{۲}{۹۶} - \frac{۲}{۹۶} = \frac{۰}{۹۶}$$

$$نیز \quad ستہ تہ + ستہ تہ = \frac{۱}{۹۶}$$

پس وہ مساوات جس کی اصلیں ستہ تہ، ستہ تہ، ستہ تہ ہیں ہو جاتی ہے

$$(دوات) + ۲ (دوات) + (دوات) = \frac{۱}{۹۶} - \frac{۲}{۹۶} = \frac{۰}{۹۶}$$

یا گ کی بجائے اسکی قیمت دفعہ ۳ سے درج کرنے سے

$$۴ (دوات + ۲) - ۲ (دوات + ۲) = ۰$$

جو دوات + ۲ = ۰ کے ابدال سے معیاری محول کبھی میں شمول

ہوتا ہے۔

$$عہ + ب + جہ - ضہ = ستہ تہ$$

$$عہ + ب - جہ - ضہ = ستہ تہ$$

$$اور نیز \quad عہ + ب + جہ + ضہ = ستہ تہ$$

ان سے ہم معلوم کرتے ہیں

$$عہ = - \frac{۱}{۹۶} - ستہ تہ + ستہ تہ$$

$$ب = - \frac{۱}{۹۶} + ستہ تہ - ستہ تہ$$

$$جہ = - \frac{۱}{۹۶} + ستہ تہ - ستہ تہ$$

$$ضہ = - \frac{۱}{۹۶} - ستہ تہ - ستہ تہ$$

(141)

نیز $ا_۱ ا_۲ ا_۳$ کی تذکرہ بالا قیمتوں سے مساوات

$$ا_۱ ا_۲ ا_۳ = \frac{۱}{۲}$$

حاصل ہوتی ہے جس کے ذریعہ ایک جذر کو دوسرے دو جذروں کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے اور پھر یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اصل کے لئے عام ضابطہ وہی ہے جو پہلے حاصل ہو چکا ہے۔

اس دفعہ کے مضمون کے سلسلہ میں چار درجی کی اصولوں کے ایسے دو تفاعلوں کا ذکر کر دینا سہولت بخش ہے جو ایسے خواص رکھتے ہیں جو دفعہ ۵۹ میں کعبی کی اصولوں کے متناظر تفاعلوں کے ثابت شدہ خواص کے مشابہ ہیں۔ چونکہ بالا دفعہ کی ترقیم کے مثال ترقیم اختیار کرنے سے ان تفاعلوں کو $ل$ ، $م$ کی رقوم میں شکل ذیل میں لکھا جاسکتا ہے:-

$$ل = (بہ جب + عہ ضہ) + سہ (جہ عہ + بہ ضہ) + سہ (عہ بہ + جہ ضہ)$$

$$م = (بہ جب + عہ ضہ) + سہ (جہ عہ + بہ ضہ) + سہ (عہ بہ + جہ ضہ)$$

دفعہ ۶۳ مثال (۱) کی مساواتوں کے ذریعہ ان تفاعلوں کو محمول کعبی کی اصولوں کی رقوم میں شکل

$$\frac{۱}{۲} ل = طہ + سہ طہ + سہ طہ$$

$$\frac{۱}{۲} م = طہ + سہ طہ + سہ طہ$$

میں بیان کیا جاسکتا ہے۔ نیز ان کو دفعہ ہذا کی اُس مساوات کی مدد سے جوت اور طہ کو مربوط کرتی ہے $ا_۱ ا_۲ ا_۳$ کی رقوم میں حسب طریقہ ذیل بیان کیا جاسکتا ہے

$$\frac{۱}{۲} ل = ا_۱ + سہ ا_۲ + سہ ا_۳$$

$$\frac{۱}{۲} م = ا_۱ + سہ ا_۲ + سہ ا_۳$$

یہ تفاعل لی اور م، چار درجی کے نظریہ میں اتنی ہی اہمیت رکھتے ہیں جتنی اہمیت دفعہ ۵۹ کے تفاعل کبی کے نظریہ میں رکھتے ہیں۔ ان جملوں کے مجموعہ چار مقداروں کے سادہ ترین تفاعل ہیں جنکی صرف دو قیمتیں ہوتی ہیں جبکہ ان مقداروں کو ہر طرح آپس میں تبدیل کیا جاتا ہے۔ وہ مندرجہ بالا محول کبی کے محول دو درجی کی اصلیں ہیں اور چار درجی کے ہر بیان شدہ حل میں موجود رہتی ہیں۔

مثالیں

(142)

۱۔ ثابت کرو کہ لی اور م، اسلوں ع، ب، ج، ض کے فرقوں کے تفاعل ہیں۔

ع، ب، ج، ض کو بقدر ھ کے بڑھانے سے لی اور م غیر متغیر رہتے ہیں کیونکہ $۱ + س + س = ۰$ ۔

۲۔ اسلوں ع، ب، ج، ض کے فرقوں کے مبعوضوں کے حاصل ضرب کے سروں کی رقوم میں معلوم کرو۔

طہ، طہ، طہ کی رقوم میں لی اور م کی قیمتوں سے ہم یہ آسانی معلوم کرتے ہیں کہ

$$۱۲ طہ = لی + م - لی = م - (ب - ج) = (ع - ض) (س - س)$$

$$۱۲ طہ = س - لی + س - م = س - (ج - ع) = (ب - ض) (س - س)$$

$$۱۲ طہ = س - لی + س - م = س - (ع - ب) = (ج - ض) (س - س)$$

پھر ان مساداتوں سے طرفین کی رقوم کو باہم ضرب دیکر اور یہ یاد رکھ کر کہ طہ، طہ، طہ مسادات

$$۳ طہ = ع - ج = ۰$$

کی اصلیں ہیں ہم یہ معلوم کرتے ہیں کہ

$$لی + م = ۴۳۲ - ج$$

نوٹ سوم)۔ اگرچہ علی مقاصد کے لئے اصولوں کو جدا کر نیکی وہ طریقے قابل ترجیح ہیں جو آئندہ بیان کئے جائینگے تاہم اس باب کے مضامین کے سلسلہ میں چار درجی کی مربع دار فرقوں کی مساوات کا ذکر کر دینا کافی دلچسپی کا باعث ہوگا۔ چنانچہ ہم عام سے عام شکل میں چار درجی کے لئے یہ مساوات مصوب کرینگے۔ دفعہ ۶۱ مثال ۱ میں جو کچھ ثابت کیا گیا ہے اسکے مطابق یہ معلوم ہوگا کہ حاصل ہونیوالی مساوات کے سرسب کے سب 'د'، 'ھ'، 'ع' اور 'جے' کی رقوم میں بیان ہو سکتے ہیں۔

یہ مسئلہ فی الحقیقت اس کے مائل ہے کہ حسب ذیل حاصل ضرب کو چار درجی کے سروں کی رقوم میں بیان کیا جائے :-

$$\{ \text{فہ} - (\text{بہ} - \text{جہ}) \} \{ \text{فہ} - (\text{جہ} - \text{دہ}) \} \{ \text{فہ} - (\text{دہ} - \text{ضہ}) \} \{ \text{فہ} - (\text{ضہ} - \text{زہ}) \}$$

x { \text{فہ} - (\text{یہ} - \text{ضہ}) \} \{ \text{فہ} - (\text{جہ} - \text{ضہ}) \} \{ \text{فہ} - (\text{جہ} - \text{ضہ}) \} \{ \text{فہ} - (\text{جہ} - \text{ضہ}) \}

اس حاصل ضرب کو معلوم کرنا سب سے آسان طریقہ یہ ہے کہ ان چھ اجزاء ضربی میں سے دو دو کے جٹ بنائے جائیں اور ایسے تین حاصل ضربوں کو (جنکو ہم '۱'، '۲'، '۳' سے تعبیر کریں گے) علیحدہ علیحدہ محول بعضی کی اصولوں کی رقوم میں بیان کیا جائے اور آخر میں حاصل ضرب '۱'، '۲'، '۳' کو 'د'، 'ھ'، 'ع' جے کی رقوم میں بیان کیا جائے۔

$$\Pi \equiv \text{فہ} - \{ (\text{بہ} - \text{جہ}) + (\text{دہ} - \text{ضہ}) \} + (\text{جہ} - \text{دہ}) + (\text{ضہ} - \text{زہ})$$

اور دفعہ ۶۱ کے نتیجوں کی مدد سے ہم (بہ - جہ) (دہ - ضہ) کے لئے یہ آسانی حسب ذیل جملے اخذ کرتے ہیں :-

$$\Pi^2 = (\text{طہ} - \frac{\text{ھ}}{\text{د}} - \frac{\text{ھ}}{\text{د}} - \frac{\text{ھ}}{\text{د}}) (\text{طہ} - \frac{\text{ھ}}{\text{د}} - \frac{\text{ھ}}{\text{د}} - \frac{\text{ھ}}{\text{د}}) + (\text{طہ} - \frac{\text{ھ}}{\text{د}} - \frac{\text{ھ}}{\text{د}} - \frac{\text{ھ}}{\text{د}}) (\text{طہ} - \frac{\text{ھ}}{\text{د}} - \frac{\text{ھ}}{\text{د}} - \frac{\text{ھ}}{\text{د}}) + (\text{طہ} - \frac{\text{ھ}}{\text{د}} - \frac{\text{ھ}}{\text{د}} - \frac{\text{ھ}}{\text{د}}) (\text{طہ} - \frac{\text{ھ}}{\text{د}} - \frac{\text{ھ}}{\text{د}} - \frac{\text{ھ}}{\text{د}})$$

پس بغیر کسی شکل کے بھی حاصل ہوتا ہے

$$\Pi \equiv \text{فہ} + (\text{طہ} + \frac{\text{ھ}}{\text{د}}) (\frac{\text{ھ}}{\text{د}} + \frac{\text{ھ}}{\text{د}}) + \frac{\text{ع}}{\text{د}} - \frac{\text{طہ}}{\text{د}} - \frac{\text{طہ}}{\text{د}}$$

اختصار کی خاطر ترقیم

۱۲ھ = اُف' ۴ع = اُق' ۱۶جے = ا' ۱۷

ق = ق + ف + ف

کو داخل کیا جائے تو π ہو جاتا ہے یہ $+ \pi$ ف - π طہ طہ طہ
حاصل ضرب π, π, π کو مثال ۱۸ صفحہ (۱۲۸) سے تحویل کیا جائے

پہ + قیہ^۲۔ (۴ قیہ^۲ + ۸ کھنہ) پہ۔ (۸ کھنہ^۲ + ۱۲ قیہ^۲)

۳۶+ قی شرافہ + ۲۷۰ (۲۷۰) = ۰

آخر الامر یہ کی قیمت درج کرنے سے ہمیں 'خ' ق' سہ کی رقوم میں مرع

$$f^2 + f^3 + f^4 + (f^2 + f^3 + f^4) + (f^2 + f^3 + f^4 + f^5 + f^6 + f^7 + f^8 + f^9 + f^{10})$$

$$+ (٦٠ \text{ فاق} - ٤٠ \text{ ق} - ١٨ \text{ ف} \sqrt{\text{ف}}) + ٩ \text{ ق} (\text{فاق} - ٦ \sqrt{\text{ف}}) -$$

$$x = \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{2}$$

(144)

۱۔ ھ، ع جے کی قوم میں یہ مساوات حسب ذیل ہوگی

١٢٨ هـ + ٢٨ + ١٩٦٦ هـ + ٢٨ (ع) + ٣٢ + ١٢٨ هـ

۱۶ھ - ۱۳ھ (جے) نہ + ۱۶ (۵۳۸ ع - ۵۴۷ ع - ۲۸۸ھ جے) نہ

$$= (152 - 13) \times 2 + (256 - 13) \times 2 = 152 + 486 = 638$$

یہ قابل توجہ ہے کہ ۱۱ کے لئے جو قیمت اوپر حاصل کی گئی ہے اسکو مساوی

طہ ۲ طہ ۳ = طہ ۱ - $\frac{1}{2}$ کی مدد سے طہ کے دو درجی تفاعل کے طور پر بیان

کیا جاسکتا ہے اور اس کے بعد کا عمل حساب اس دو درجی اور محمول کعبی کے

۱۶ مربع دائروں کی مسادات کو اس شکل میں پہلے سٹریم - رابرٹس نے

درمیان طہ کو ساقط کرنے سے جاری رکھا جاسکتا ہے۔

۶۸۔ چار درجہ کی اصولوں کی نوعیت کی جانچ۔ اس تحقیقات کو جاری

کرنے سے بیشتر دفعہ ۴۳ میں جو بیان کیا گیا ہے اسکا دہرانا ضروری ہے اور وہ یہ کہ جب کسی جبری مساوات کی اصولوں کی نوعیت کے لحاظ سے کوئی شرط سروں کے ایک تفاعل کی علامت سے تعبیر ہو تو ان سروں کا حقیقی عددی مقداروں کو بغیر کثافہ سے لیا جاتا ہے۔ فرید بریں یہ بھی تسلیم کر لیا جاتا ہے کہ سب سے بڑے درجہ کی رقم کا سر معدوم نہیں ہوتا جیسا کہ مذکورہ بالا دفعہ میں کیا گیا تھا۔

حسب سابق فرض کرو کہ Δ سے سروں کا وہ تفاعل تعبیر ہوتا ہے
(اس کو ہم ہمیشہ کہیں گے) جسکو ایک مثبت مددی جزو ضربی سے ضرب دیا جائے
تو وہ اصولوں کے فرقوں کے مربعوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔
اب دفعات گذشتہ کے ثابت شدہ سُللوں سے مساوات ملتی ہے

$$5256 = (1-ج-ع)^2 (ج-ع)^2 (ع-ب)^2 (ع-ض)^2 (ب-ض)^2 (ج-ض)^2$$

جہاں

$$2 \cdot 2 - 2 = 2$$

ذیل میں اصولوں کی نوعیت کی بحث کو سہولت کے مد نظر تین حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے یعنی (۱) جب Δ معدوم ہو یا (۲) جب وہ منفی ہو یا (۳) جب وہ مثبت ہو۔

(۱) جب 'Δ' معدوم ہو تو مساوات میں مساوی اقلیتیں ہوتی ہیں۔

یہ امر کی مندرجہ بالا قیمت سے ظاہر ہے۔ اب چار مختلف صورتیں آئیں

ہوتی ہیں۔ (مذہب سرف دوا علییں مساوی ہوں۔ اس صورت میں

ع اور جے علیحدہ علیحدہ معرودم نہیں ہوتے۔ (یہ) جب تین اسلیں مساوی

ہوں اس صورت میں علیہ علیہ ع۔ اور جے۔ (دیکھو مثال ۲)

(۱۱)۔ (ج)۔ بے باکوں سے دو سلفِ رون مساکوی ہوں۔

اس صورت میں شرطیں ہونگی گ = ۱، ا = ع - ۱۲ھ = ۲۔ (دفعہ ۶۱ مثال ۳)۔
دفعہ ۳ کی مثال کے ذریعہ آسانی کے ساتھ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ یہ شرطیں
مساوات ۵ = کو مستلزم ہیں۔ پس یہ دو مساواتیں، مساوات ۵ =
کے ساتھ ملکر صرف دو شرطوں کے ماثل ہیں۔ (ضہ) جب سب اصلیں مساوی

ہوں۔ اس صورت میں دفعہ ۶۱ سے تین شرطیں ھ = ۱، ع = ۱، اور جے =
اخذ کیا جاسکتی ہیں۔ ان کو ایک ایسی شکل میں لکھا جاسکتا ہے جو دفعہ ۴۳ کی
صورت (۴) کی شرطوں کے لئے حاصل کردہ شکل کے مشابہ ہو۔

(۲) جب ۵ منفی ہو تو مساوات کی دو اصلیں حقیقی اور دو اصلیں

خیالی ہوتی ہیں اصلوں کی رقوم میں ۵ کی قیمت سے اسکو اخذ کیا جاسکتا ہے
کیونکہ جب سب اصلیں حقیقی ہوں تو ۵ صریحاً مثبت ہے اور جب ۵، ۵، ۵، ۵
جہ ۵ کی بجائے مناسب خیالی ہلے یعنی ۵، ۵، ۵، ۵ کی بجائے
درج کئے جاتے ہیں تو فوراً یہ معلوم ہوتا ہے کہ ۵ مثبت ہے اسوقت بھی جبکہ
سب اصلیں خیالی ہوں۔

(۳) جب ۵ مثبت ہو تو یا تو سب اصلیں حقیقی ہیں یا سب

اصلیں خیالی۔ اسکو بھی ۵ کی قیمت سے حاصل کیا جاسکتا ہے کیونکہ ۵، ۵، ۵، ۵
کی بجائے ۵، ۵، ۵، ۵ درج کرنے سے ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ ۵ منفی ہے
جبکہ دو اصلیں حقیقی اور دو اصلیں خیالی ہوں۔ اس لئے اس صورت میں
یعنی جب ۵ مثبت ہو سہروں کا صرف یہ تفاعل ہی اصلوں کی نوعیت
کو پوری طرح متعین کرنے میں کافی نہیں ہے کیونکہ پھر بھی یہ امر مشتبہ رہ جاتا
ہے کہ آیا سب اصلیں حقیقی ہیں یا سب خیالی۔ مزید شرطیں جو ان دو صورتوں
میں تیز سید کر نیچے لئے ضروری ہیں یوں کر کے لیں (دفعہ ۶۱) سے اس طرح
حاصل کیا جاسکتی ہیں :- سب اصلوں کے حقیقی اور مثبت ہونیکے لئے یہ ضروری

ہے کہ علامتیں یکے بعد دیگرے مثبت اور منفی ہوں اور جب علامتیں اس نوعیت کی ہوں تو کبھی کوئی حقیقی منفی اصل نہیں رکھ سکتا۔ اس لئے ہم دفعہ ۶۱ مثال ۱۲ کی مدد سے اس صورت پر منطبق ہونیوالا مسئلہ درجہ ذیل عام نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں:-
جب Δ مثبت ہو تو ہر صورت میں چار درجہ کی سب اصلیں خیالی ہوتی ہیں سوائے اس صورت کے جب یہ شرطیں پوری ہوں کہ Δ منفی اور Δ^2 ع-۱۲ Δ منفی ہو اور ایسی صورت میں سب اصلیں حقیقی ہوں۔

مثالیں

(148)

- ۱۔ ثابت کرو کہ اگر Δ مثبت ہو یا اگر $\Delta = 0$ (اور گ $\neq 0$) تو کبھی کی اصلوں کا ایک زوج خیالی ہوگا۔
- ۲۔ ثابت کرو کہ اگر Δ منفی ہو تو کبھی کی اصلیں :- (۱) سب حقیقی اور غیر مساوی (۲) دو مساوی یا (۳) دو خیالی ہوں گی بوجہ اسکے کہ گ (۱) چھوٹا (۲) مساوی یا (۳) بڑا ہو۔ Δ^2 ع-۱۲
- ۳۔ اگر کبھی مساوات

$$x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$$

کی دو اصلیں ع کے مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ

$$-\frac{1}{2} = \frac{2}{3} = \frac{1}{4}$$

جہاں $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ، $2 - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ ، $3 - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ ، $4 - \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$ ۔ اگر

$$1 + 3x + 2x^2 + 3x^3 + x^4 = 0 \quad (1)$$

کامل مکعب ہو تو ثابت کرو کہ

$$(1 - \frac{1}{2}) + (2 - \frac{2}{3}) + (3 - \frac{3}{4}) = 0$$

۵۔ وہ شرط معلوم کرو کہ کبھی

$$۱ لا + ۳ ب + ۳ ج + لا + د$$

کو شکل

ل (لا - عہ) + م (لا - بی) + ن (لا - جہ) +
میں لکھا جاسکے جہاں عہ، بی، جہ، کبھی مساوات

$$۱ لا + ۳ ب + ۳ ج + لا + د = ۰$$

کی اصلیں ہیں۔

شکلوں کا مقابلہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$۱ = ل + م + ن$$

$$- ب = ل + عہ + م + بی + ن + جہ$$

$$ج = ل + عہ + م + بی + ن + جہ$$

$$- د = ل + عہ + م + بی + ن + جہ$$

نیز $۱ لا + ۳ ب + ۳ ج + لا + د = ۰$ ، وغیرہ

اسلئے ان مساواتوں کو علی الترتیب د، ج، ب، لا سے ضرب دو اور جمع کرو
تو مطلوبہ شرط حاصل ہوگی

$$۰ = (۱ لا + ۳ ب + ۳ ج + لا + د) - (۳ ب + ۳ ج + لا + د) = ۰$$

۶۔ اگر عہ، بی، جہ، کبھی مساوات

$$۱ لا + ۳ ب + ۳ ج + لا + د = ۰$$

کی اصلیں ہوں تو مساوات

$$\sqrt{۱ لا - عہ} + \sqrt{۱ لا - بی} + \sqrt{۱ لا - جہ} = ۰$$

کو مناطق بناؤ اور نتیجہ کو د، لا، م کی رقوم میں بیان کرو۔

(147)

جواب :- $125 \times 6 + 210 \times 5 + 28 \times 1 = 28$

۷۔ اگر دو درجی مساواتوں

$$\begin{aligned} & \text{۱) } ۲\text{ب} + ۱\text{ج} = ۰, \quad \text{۲) } ۲\text{ب} + ۱\text{ج} = ۰ \\ & \text{۳) } ۲\text{ب} + ۱\text{ج} = ۰, \quad \text{۴) } ۲\text{ب} + ۱\text{ج} = ۰ \end{aligned}$$

کی اصلیں عم، عم، عم، اور عم، عم ہوں تو وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں عم، عم کی چار قیمتیں ہوں۔

فرض کرو $۱\text{ج} = ۱, ۲\text{ب} = ۱, ۳\text{ج} = ۱, ۴\text{ج} = ۱$

جواب :- (۱) $۲\text{ب} + ۱\text{ج} = ۰$ (۲) $۲\text{ب} + ۱\text{ج} = ۰$ (۳) $۲\text{ب} + ۱\text{ج} = ۰$ (۴) $۲\text{ب} + ۱\text{ج} = ۰$

نوٹ :- یہ اور نیچے کی دو مثالیں کہ کو ان جذبات میں بیان کرنے سے خمیں مساواتوں کے سر شامل ہوں مل ہو سکتی ہیں۔

۸۔ مثال کی ترقیم استعمال کر کے وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں عم + عم کی

چار قیمتیں ہوں۔

فرض کرو $۲\text{ک} = ۱, ۱\text{ج} = ۱, ۲\text{ج} = ۱, ۲\text{ب} = ۱$

جواب :- (۱) $۲\text{ب} + ۱\text{ج} = ۰$ (۲) $۲\text{ب} + ۱\text{ج} = ۰$ (۳) $۲\text{ب} + ۱\text{ج} = ۰$ (۴) $۲\text{ب} + ۱\text{ج} = ۰$

اس مثال میں حاصل ہونیوالا چار درجی ایسا ہے کہ گ =

۹۔ اسی صورت میں اگر $\frac{1}{4} = (عم - ۱)$ تو وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں نہ کی مختلف قیمتیں ہوں۔

فرض کرو $۱\text{ج} = ۱, ۲\text{ب} = ۱, ۳\text{ج} = ۱, ۴\text{ج} = ۱$

جواب :- (۱) $۲\text{ب} + ۱\text{ج} = ۰$ (۲) $۲\text{ب} + ۱\text{ج} = ۰$ (۳) $۲\text{ب} + ۱\text{ج} = ۰$ (۴) $۲\text{ب} + ۱\text{ج} = ۰$

۱۰۔ ثابت کرو کہ جب چار درجی میں ایک دو ہری امل ہو تو اس کمی میں جسکی

اصلیں ۴ کی قیمتیں ہیں (دفعہ ۶۵) وہی دو ہری امل ہوگی۔ نیز معلوم کرو کہ چار درجی

تین اصلیں مساوی ہوں تو یہ کبھی کیا ہو جاتا ہے۔

۱۱۔ اگر h اور j دونوں مثبت ہوں تو بلا واسطہ (یولر کے کبھی کی امداد کے بغیر) ثابت کرو کہ چار درجہ کی سب اصلیں خیالی ہیں۔

اصلوں کی رقوم میں h کے لئے جو جملہ ہے (مثال ۱۹ صفحہ ۲۷۲) اس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ جب h مثبت ہو تو خیالی اصلوں کا کم از کم ایک زوج h تک $h-1$ ہونا چاہئے۔ اب سب اصلوں کو بقدر h کے گھٹانے سے اور انکو h سے تقسیم کرنے سے (کیونکہ ان استحالوں سے اصلوں کے دوسرے زوج h ضد کی نوعیت پر کوئی اثر نہیں پڑیگا اور نہ h اور j کی علامتوں پر) چار درجہ کو شکل ذیل میں رکھا جاسکتا ہے۔

$$(1 + \lambda^2)(\lambda + \lambda^2)$$

$$یا \quad \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \quad \text{جہاں } \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

$$\text{جس سے} \quad h = j - \lambda^2, \quad e = q - \lambda^2, \quad f = 2 - \lambda^2, \quad g = 2 - \lambda^2$$

اور اسلئے

$$q - \lambda^2 = j - \lambda^2 = \frac{j}{\lambda^2} + (h + \lambda^2) = \frac{j}{\lambda^2} + h + \lambda^2$$

$$یا \quad -\left(\frac{j}{\lambda^2} - h\right) = \frac{j}{\lambda^2} + h + \lambda^2$$

جس سے یہ ثابت ہے کہ h اور h ضد خیالی ہیں جب h اور j مثبت ہوں۔ (دیکھو دفعہ ۶۱ مثال ۸)

(148)

۱۲۔ اگر چار درجہ کی مساوی اصلوں کے دو مختلف زوج ہوں تو بلا واسطہ ثابت کرو کہ

$$h = 8, \quad e = 12, \quad f = 8$$

اس صورت میں چار درجہ کو h سے تقسیم کیا جائے تو وہ شکل ذیل اختیار کرتا ہے

$$(لا - عه) (لا - یه) = \left\{ \left(\frac{عه - یه}{۲} \right) - \left(\frac{عه + یه}{۲} - لا \right) \right\} = \left(\frac{ی - ک}{۲} \right)$$

$$جہاں ی = لا + لا + لا، اور ک = \frac{عه - یه}{۲}$$

اب شکلوں

$$ی - ۲ک + ی + ک، ی + ۶ھ + ی + ۲گ + ی + لا + ع - ۳ھ$$

اور
کا مقابلہ کرو تو

$$۳ھ = ک - ۲گ، لا + ع - ۳ھ = ک$$

جن سے اوپر کے ربط فوراً حاصل ہو جاتے ہیں۔ طالب علم آسانی کے ساتھ ثابت کر سکتا ہے کہ یہ ربط دفعہ ۶۱ مثال ۳ کے ربطوں کے مماثل ہیں۔ نیز اس بات کا مشاہدہ کرنا ضروری ہے کہ اس صورت میں چار درجی کے حل میں صرف ایک جذر المرہج شامل ہوتا ہے (جو دو درجی (لا - عه) (لا - یه) کے حل سے حاصل ہوتا ہے)۔

۱۳۔ وہ شرط معلوم کرو کہ چار درجی کو شکل

$$ل (لا + ۲ف لا + ق) + م (لا + ۲ف لا + ق) + ن$$

میں رکھا جاسکے۔

اس صورت میں دوسرے اور چوتھے سروں کو ایک ساتھ ایک ہی احتمال سے خارج کیا جاسکتا ہے اور عام حل میں صرف دو جذر المرہج شامل ہوتے ہیں۔
جواب :- گ = ۰

۱۴۔ ثابت کرو کہ چار درجی

$$م (لا - ن) - ن (لا - م)$$

کے لئے جے معدوم ہوتا ہے۔

۱۵۔ اگر چار درجی کی اعلیٰ عہ، یہ، جہ، ضہ ایک خط مستقیم پر کے مبداء سے چار نقطوں کے فاصلوں کو تعبیر کریں تو ثابت کرو کہ جب یہ نقطے خط پر ایک

اس لئے

$$ع = ۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰ = ۰$$

(150)

(ج) جب انیس سے ایک نسبت موسیقی ہو تو قد کی چھ قسمیں - ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ ہیں جن میں سے ہر ایک دو مرتبہ تکرار پاتی ہے۔ اور اس صورت میں جے = ۰۔۔۔ کیونکہ اگر

$$ف = ۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰ = ۰$$

جو جے کا ایک جزو ضربی ہے (دیکھو مثال ۱۸ صفحہ ۷۱)۔
(د) یہ نتیجے اور ان کے عکس اُس چھ درجی مساوات کو جو ف میں ہے شکل ذیل میں لکھنے سے ثابت کئے جاسکتے ہیں۔ (دیکھو مثال ۱۲ صفحہ ۷۲)۔

$$ع = \{ (ف + ۱) (ف - ۲) (ف - ۳) \} = ۲۴ \text{ جے} = \{ (ف + ۱) (ف - ۲) (ف - ۳) \}$$

۱۷۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$\frac{(۱ - لا) لا}{(۱ - لا) لا} = \frac{(۱ + لا) لا}{(۱ + لا) لا}$$

کے حل حسب ذیل ہیں:-

$$۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰ = ۰$$

۱۸۔ (ع - ۱) (ج - ۲) (ف - ۳) کو طم، طم، طم کے ایک منطق تفاعل کے طور پر بیان کرو اور پھر اسکو چار درجی کے سرول کی رقوم میں لکھو۔

$$\text{جواب:- } ۱۲۸ - ۱۲۸ = (طم - طم) (طم - طم) = (طم - طم) (طم - طم) = ۹۶ - ۹۶ = ۰$$

(۱۳ جے)

$$۱۹ - (ب - ۱) (ج - ۲) (ف - ۳) + (ج - ۲) (ف - ۳) (ب - ۱) + (ف - ۳) (ب - ۱) (ج - ۲) + (ب - ۱) (ج - ۲) (ف - ۳)$$

+ (ع - ۱) (ج - ۲) (ف - ۳) کو طم، طم، طم کے منطق تفاعل کے طور پر بیان کرو۔

یہ متشکل تفاعل، جملہ

$$(م۱ - ن۱) + (ن۲ - ل۲) + (ل۳ - م۳)$$

$$= ۲۵۶ = (ط۱ - ط۲) (ط۲ - ط۳) (ط۳ - ط۴)$$

کے معادل ہے۔

کے

۲۰۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں چار درجہ کی اسلوں میں سے دو دو ملو

حاصل ضرب ہوں۔

مطلوبہ مساوات جملہ

$$(ف۱ - ب۱) (ف۲ - ع۲) = (ف۱ - ل۲) + (ل۳ - م۳) = ۲ (ف۱ - ن۲) + (ن۳ - م۳) = ۲ (ف۱ - ن۲) + (ن۳ - م۳)$$

کے نمونہ کے تین اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے۔

جواب :- (۱) (ف۱ - ن۲) (ن۳ - م۳) (۲) (ف۱ - ل۲) (ل۳ - م۳) (۳) (ف۱ - ب۱) (ب۲ - ع۲)

$$= ۰ = ۲ + ۱۶ + ۲ = ۲۰$$

۲۱۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں، عہ + ب۱ کی مختلف قیمتیں ہوں جہاں

عہ، ب۱، ب۲، ع۲ چار درجہ کی اصلیں ہیں۔

مطلوبہ مساوات جملہ

$$(ف۱ - ب۱) (ف۲ - ع۲) = (ف۱ - ل۲) + (ل۳ - م۳) = ۲ (ف۱ - ن۲) + (ن۳ - م۳) = ۲ (ف۱ - ن۲) + (ن۳ - م۳)$$

$$= ۲ (ف۱ - ن۲) + (ن۳ - م۳) = ۲ (ف۱ - ن۲) + (ن۳ - م۳)$$

کے نمونہ کے تین اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے۔

جواب :- (۱) (ف۱ - ن۲) (ن۳ - م۳) (۲) (ف۱ - ل۲) (ل۳ - م۳) (۳) (ف۱ - ب۱) (ب۲ - ع۲)

$$= ۰ = ۲ + ۱۶ + ۲ = ۲۰$$

۲۲۔ ثابت کرو

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{2} - \frac{13}{2} \right) \quad \text{جے ۲ - ۵۲ ع}$$
 طہ، طہ، طہ کی رقوم میں ع، ب، جہ، قہ کے لئے جو جملے ہیں ان سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{2} - \frac{13}{2} \right) \quad \text{جے ۲ - ۵۲ ع}$$
 جبکہ ا، ہ، ع، بے کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے۔

۲۲ - ثابت کرو

$$0 = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{2} - \frac{13}{2} \right) \quad \text{طہ}$$

جبکہ ع =۔ اور م، ۳ پ یا ۳ پ + ا کی شکل کا ہو جہاں پ یک مثبت صحیح عدد ہے۔

۲۳ - ثابت کرو کہ

$$6 \equiv 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 \pmod{13}$$

کو دو مربعوں کے فرق یا مجموعے کے طور پر بیان کیا جاسکتا ہے اگر

$$\text{جے} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 \pmod{13}$$

$$16 \equiv 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 \pmod{13}$$

$$2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 \pmod{13}$$

اور (۱ - ج) + ۲ + (۱ - ج) + ۳ + (۱ - ج) + ۴ + (۱ - ج) + ۵ + (۱ - ج) + ۶ + (۱ - ج) + ۷ + (۱ - ج) + ۸ + (۱ - ج) + ۹ + (۱ - ج) + ۱۰ + (۱ - ج) + ۱۱ + (۱ - ج) + ۱۲

$$(1 - j) + 2 + (1 - j) + 3 + (1 - j) + 4 + (1 - j) + 5 + (1 - j) + 6 + (1 - j) + 7 + (1 - j) + 8 + (1 - j) + 9 + (1 - j) + 10 + (1 - j) + 11 + (1 - j) + 12$$

یا جے =۔

۲۵ - اگر مساوات

$$\begin{aligned} & \text{۱} + \text{۲} + \text{۳} + \text{۴} + \text{۵} + \text{۶} + \text{۷} + \text{۸} + \text{۹} + \text{۱۰} = \text{۵۵} \\ & \text{کی اعلیٰ حد ۱۰ ہے، جب ۱۰ سے زیادہ تو سرور ۱۰، ۱۱، ۱۲ وغیرہ کی رقوم میں مساوات} \\ & \text{۱۰ - ۱۰ = ۰، ۱۱ - ۱۰ = ۱، ۱۲ - ۱۰ = ۲، ۱۳ - ۱۰ = ۳، ۱۴ - ۱۰ = ۴، ۱۵ - ۱۰ = ۵، ۱۶ - ۱۰ = ۶، ۱۷ - ۱۰ = ۷، ۱۸ - ۱۰ = ۸، ۱۹ - ۱۰ = ۹، ۲۰ - ۱۰ = ۱۰} \end{aligned}$$

کو مل کر دو۔

اگر ۱۰ + ۱۰ = ۲۰، ۱۱ + ۱۱ = ۲۲، ۱۲ + ۱۲ = ۲۴، ۱۳ + ۱۳ = ۲۶، ۱۴ + ۱۴ = ۲۸، ۱۵ + ۱۵ = ۳۰، ۱۶ + ۱۶ = ۳۲، ۱۷ + ۱۷ = ۳۴، ۱۸ + ۱۸ = ۳۶، ۱۹ + ۱۹ = ۳۸، ۲۰ + ۲۰ = ۴۰۔
کو ناظر بنایا جائے اور ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰ کی بجائے سرور کو درج کیا جائے تو

$$(۳ - ۲) = ۱ \quad (۲ - ۱) = ۱ \quad (۱ - ۰) = ۱$$

اب ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ کی بجائے ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ درج کرنے سے
اور تحول کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$۱ + ۲ = ۳ \quad ۲ + ۳ = ۵ \quad ۳ + ۵ = ۸ \quad ۵ + ۸ = ۱۳ \quad ۸ + ۱۳ = ۲۱ \quad ۱۳ + ۲۱ = ۳۴ \quad ۲۱ + ۳۴ = ۵۵$$

۲۶ - چار درجہ کی قوتوں کی مساوات اور تین مجموعوں کی مساوات معلوم کر دو
(مثال ۲۱ صفحہ ۲۲۲) اور چار درجہ کو صرف ایک استعمال کے ذریعہ حل کر دو۔
لا کی بجائے ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ اور دفعہ ۲۵ کی ترقیم استعمال کرنے سے

(152)

$$۱ + ۲ = ۳ \quad ۲ + ۳ = ۵ \quad ۳ + ۵ = ۸ \quad ۵ + ۸ = ۱۳ \quad ۸ + ۱۳ = ۲۱ \quad ۱۳ + ۲۱ = ۳۴ \quad ۲۱ + ۳۴ = ۵۵$$

لا اور ۱۰ کے لئے ایسی قیمتیں فرض کی جاسکتی ہیں کہ وہ دو مساواتوں

$$۱ + ۲ = ۳ \quad ۲ + ۳ = ۵ \quad ۳ + ۵ = ۸ \quad ۵ + ۸ = ۱۳ \quad ۸ + ۱۳ = ۲۱ \quad ۱۳ + ۲۱ = ۳۴ \quad ۲۱ + ۳۴ = ۵۵$$

کو پورا کریں جن سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ۱ کی کسی قیمت کے جواب میں لا کی دو مساوی
اور مختلف علامت قیمتیں ہیں اور جب لا کو قاف کیا جاتا ہے تو ۱ کے لئے
ہمیں چھٹے درجہ کی ایک مساوات ملتی ہے۔ ۱ اور لا کی قیمتوں کو اصلوں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰
کی رقوم میں حاصل کر نیلے لئے فرض کر دو

$$س + لآ = لآ = عہ، س - لآ = بہ، جسے ۲س = عہ + بہ، ۲لآ = عہ - بہ$$

اسلئے لآ میں وہ مساوات جو س کو سا قط کرنے سے حاصل ہوتی ہے نیم فرقوں کی مساوات ہے اور س میں چھپے درجہ کی مساوات نیم مجموعوں کی مساوات ہے۔ نو ذیل کے طریقہ تحویل سے موخر الذکر مساوات کو فوراً شکل ذیل میں بیان کیا جاسکتا ہے:-

$$۲س - ۲لآ = عہ + بہ = ۰ \quad (\text{مثال ۲۱ سے مقابلہ کرو})$$

چار درجہ کی کو حل کر نیچے لے اس آخری مساوات سے حاصل ہوتا ہے $عہ = لآ$ جہاں طہ نحول کعبی کی ایک اصل ہے۔ پس

$$عہ = لآ + س + ب = لآ + طہ - ۵ = لآ - ۳ = عہ - ۳ = \frac{۱}{۲} (عہ + ۵۲ + \frac{گ}{عہ})$$

جس سے بالآخر

$لآ + ب = لآ + ۶ = لآ + طہ - ۵ + \frac{گ}{عہ - ۵۲ - لآ}$

جو ایک ایسا جملہ ہے جسکی صرف چار قیمتیں ہیں اور جس میں چار درجہ کی اصل نحول کعبی کی ایک واحد اصل کی رقوم میں بیان ہوئی ہے۔

۲۷۔ ثابت کرو کہ ایک دی ہوئی کعبی مساوات کی ایک اصل طہ کا ہر منطق جبری تفاعل عام طور پر شکل

$$\frac{ج. + ج. طہ}{ج. + ج. طہ}$$

میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ دیا ہوا تفاعل $\frac{فہ (طہ)}{پہ (طہ)}$ ہے جہاں فہ (طہ) اور پہ (طہ) طہ کے کسی درجہ کے منطق صحیح تفاعل ہیں۔ دئے ہوئے کعبی کو متواتر تحویل کرنے سے انہیں سے ہر ایک تفاعل دو درجہ تفاعل میں تحویل ہو سکتا ہے۔ پس دیا ہوا تفاعل

منہ

ج. + ج. طه + ج. طه

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

میں تحویل ہو سکتا ہے۔ اس کو مندرجہ بالا شکل کے مساوی رکھنے سے اور دے جو

کبھی سے تمویل کرنے سے ہمیں ایک تہا نہ مساوات یعنی لی + لی + لی + لی + لی + لی = ۱۔

لیگی جہاں لی، لی، خلی تفاعل میں ج، ج، ج، د، د، کے۔ اس لئے
لی، =، لی، =، لی، =، اور ان سے ج، ج، ج، د، د، کی نسبت ملتی ہیں۔

۲۸۔ ثنابت کر دو کہ چار درجہ مساوات کے حل میں جذر الکعب نکالنے کی ضرورت

نہیں پڑتی جب اسلوں نے کہ 'جہ' ضمہ کے درمیان کوئی ایسا ربط موجود ہو جو

محول گنہی کی افضل طہ کے ایک منقطع تفاعل کو صفر کے مساوی رکھنے سے بیان ہو سکے۔

طہ کے کسی شعلہ تفاعل کو ہمیشہ درجہ دوم کے تفاعل میں گھٹایا جاسکتا ہے

جبکہ کشتالہ سابق میں کوہ گیا۔ پس طہ کو معلوم کرنے میں جہرا لکعب نکالنے کی ضرورت

انہیں پڑی اور مثال ۲۶ کے ضابطہ سے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ ایسی صورت میں چار درجہ

کی اصل کے جملہ میں کوئی جذرا لکعب شامل نہیں ہوتا۔

۲۹۔ جب مرادوات

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}$$

ہر کی حسب ذیل قسمیوں میں سے کسی سے پوری ہو

$$(1) \frac{h}{\lambda} \quad (2) \text{ ج } \quad (3) \text{ صفر } \quad (4) \frac{1-s-j}{2} \quad (5) \sqrt{\frac{j}{2}}$$

$$\frac{2.5-1.5}{2.5} \quad (1) \quad \frac{2.3}{2.5} \quad (2) \quad \frac{2}{1.5} \quad (3)$$

توہر صورت میں وہ ربط معلوم کر دو جو چار درجہ کی اصولوں کے درمیان موجود ہوتا ہے۔

جوابات :- (۱) $a + b - c - d = 0$ ، (۲) $b + c = 0$.

(۲) (ج - ض) (ع - ب) - (ع - ب) (ج - ض) = ۰

(۴) (۵) (۶) (۷) (۸) (۹) (۱۰) (۱۱) (۱۲) (۱۳) (۱۴) (۱۵) (۱۶) (۱۷) (۱۸) (۱۹) (۲۰) (۲۱) (۲۲) (۲۳) (۲۴) (۲۵) (۲۶) (۲۷) (۲۸) (۲۹) (۳۰) (۳۱) (۳۲) (۳۳) (۳۴) (۳۵) (۳۶) (۳۷) (۳۸) (۳۹) (۴۰) (۴۱) (۴۲) (۴۳) (۴۴) (۴۵) (۴۶) (۴۷) (۴۸) (۴۹) (۵۰) (۵۱) (۵۲) (۵۳) (۵۴) (۵۵) (۵۶) (۵۷) (۵۸) (۵۹) (۶۰) (۶۱) (۶۲) (۶۳) (۶۴) (۶۵) (۶۶) (۶۷) (۶۸) (۶۹) (۷۰) (۷۱) (۷۲) (۷۳) (۷۴) (۷۵) (۷۶) (۷۷) (۷۸) (۷۹) (۸۰) (۸۱) (۸۲) (۸۳) (۸۴) (۸۵) (۸۶) (۸۷) (۸۸) (۸۹) (۹۰) (۹۱) (۹۲) (۹۳) (۹۴) (۹۵) (۹۶) (۹۷) (۹۸) (۹۹) (۱۰۰) (۱۰۱) (۱۰۲) (۱۰۳) (۱۰۴) (۱۰۵) (۱۰۶) (۱۰۷) (۱۰۸) (۱۰۹) (۱۱۰) (۱۱۱) (۱۱۲) (۱۱۳) (۱۱۴) (۱۱۵) (۱۱۶) (۱۱۷) (۱۱۸) (۱۱۹) (۱۲۰) (۱۲۱) (۱۲۲) (۱۲۳) (۱۲۴) (۱۲۵) (۱۲۶) (۱۲۷) (۱۲۸) (۱۲۹) (۱۳۰) (۱۳۱) (۱۳۲) (۱۳۳) (۱۳۴) (۱۳۵) (۱۳۶) (۱۳۷) (۱۳۸) (۱۳۹) (۱۴۰) (۱۴۱) (۱۴۲) (۱۴۳) (۱۴۴) (۱۴۵) (۱۴۶) (۱۴۷) (۱۴۸) (۱۴۹) (۱۵۰) (۱۵۱) (۱۵۲) (۱۵۳) (۱۵۴) (۱۵۵) (۱۵۶) (۱۵۷) (۱۵۸) (۱۵۹) (۱۶۰) (۱۶۱) (۱۶۲) (۱۶۳) (۱۶۴) (۱۶۵) (۱۶۶) (۱۶۷) (۱۶۸) (۱۶۹) (۱۷۰) (۱۷۱) (۱۷۲) (۱۷۳) (۱۷۴) (۱۷۵) (۱۷۶) (۱۷۷) (۱۷۸) (۱۷۹) (۱۸۰) (۱۸۱) (۱۸۲) (۱۸۳) (۱۸۴) (۱۸۵) (۱۸۶) (۱۸۷) (۱۸۸) (۱۸۹) (۱۹۰) (۱۹۱) (۱۹۲) (۱۹۳) (۱۹۴) (۱۹۵) (۱۹۶) (۱۹۷) (۱۹۸) (۱۹۹) (۲۰۰) (۲۰۱) (۲۰۲) (۲۰۳) (۲۰۴) (۲۰۵) (۲۰۶) (۲۰۷) (۲۰۸) (۲۰۹) (۲۱۰) (۲۱۱) (۲۱۲) (۲۱۳) (۲۱۴) (۲۱۵) (۲۱۶) (۲۱۷) (۲۱۸) (۲۱۹) (۲۲۰) (۲۲۱) (۲۲۲) (۲۲۳) (۲۲۴) (۲۲۵) (۲۲۶) (۲۲۷) (۲۲۸) (۲۲۹) (۲۳۰) (۲۳۱) (۲۳۲) (۲۳۳) (۲۳۴) (۲۳۵) (۲۳۶) (۲۳۷) (۲۳۸) (۲۳۹) (۲۴۰) (۲۴۱) (۲۴۲) (۲۴۳) (۲۴۴) (۲۴۵) (۲۴۶) (۲۴۷) (۲۴۸) (۲۴۹) (۲۵۰) (۲۵۱) (۲۵۲) (۲۵۳) (۲۵۴) (۲۵۵) (۲۵۶) (۲۵۷) (۲۵۸) (۲۵۹) (۲۶۰) (۲۶۱) (۲۶۲) (۲۶۳) (۲۶۴) (۲۶۵) (۲۶۶) (۲۶۷) (۲۶۸) (۲۶۹) (۲۷۰) (۲۷۱) (۲۷۲) (۲۷۳) (۲۷۴) (۲۷۵) (۲۷۶) (۲۷۷) (۲۷۸) (۲۷۹) (۲۸۰) (۲۸۱) (۲۸۲) (۲۸۳) (۲۸۴) (۲۸۵) (۲۸۶) (۲۸۷) (۲۸۸) (۲۸۹) (۲۹۰) (۲۹۱) (۲۹۲) (۲۹۳) (۲۹۴) (۲۹۵) (۲۹۶) (۲۹۷) (۲۹۸) (۲۹۹) (۳۰۰) (۳۰۱) (۳۰۲) (۳۰۳) (۳۰۴) (۳۰۵) (۳۰۶) (۳۰۷) (۳۰۸) (۳۰۹) (۳۱۰) (۳۱۱) (۳۱۲) (۳۱۳) (۳۱۴) (۳۱۵) (۳۱۶) (۳۱۷) (۳۱۸) (۳۱۹) (۳۲۰) (۳۲۱) (۳۲۲) (۳۲۳) (۳۲۴) (۳۲۵) (۳۲۶) (۳۲۷) (۳۲۸) (۳۲۹) (۳۳۰) (۳۳۱) (۳۳۲) (۳۳۳) (۳۳۴) (۳۳۵) (۳۳۶) (۳۳۷) (۳۳۸) (۳۳۹) (۳۴۰) (۳۴۱) (۳۴۲) (۳۴۳) (۳۴۴) (۳۴۵) (۳۴۶) (۳۴۷) (۳۴۸) (۳۴۹) (۳۵۰) (۳۵۱) (۳۵۲) (۳۵۳) (۳۵۴) (۳۵۵) (۳۵۶) (۳۵۷) (۳۵۸) (۳۵۹) (۳۶۰) (۳۶۱) (۳۶۲) (۳۶۳) (۳۶۴) (۳۶۵) (۳۶۶) (۳۶۷) (۳۶۸) (۳۶۹) (۳۷۰) (۳۷۱) (۳۷۲) (۳۷۳) (۳۷۴) (۳۷۵) (۳۷۶) (۳۷۷) (۳۷۸) (۳۷۹) (۳۸۰) (۳۸۱) (۳۸۲) (۳۸۳) (۳۸۴) (۳۸۵) (۳۸۶) (۳۸۷) (۳۸۸) (۳۸۹) (۳۹۰) (۳۹۱) (۳۹۲) (۳۹۳) (۳۹۴) (۳۹۵) (۳۹۶) (۳۹۷) (۳۹۸) (۳۹۹) (۴۰۰) (۴۰۱) (۴۰۲) (۴۰۳) (۴۰۴) (۴۰۵) (۴۰۶) (۴۰۷) (۴۰۸) (۴۰۹) (۴۱۰) (۴۱۱) (۴۱۲) (۴۱۳) (۴۱۴) (۴۱۵) (۴۱۶) (۴۱۷) (۴۱۸) (۴۱۹) (۴۲۰) (۴۲۱) (۴۲۲) (۴۲۳) (۴۲۴) (۴۲۵) (۴۲۶) (۴۲۷) (۴۲۸) (۴۲۹) (۴۳۰) (۴۳۱) (۴۳۲) (۴۳۳) (۴۳۴) (۴۳۵) (۴۳۶) (۴۳۷) (۴۳۸) (۴۳۹) (۴۴۰) (۴۴۱) (۴۴۲) (۴۴۳) (۴۴۴) (۴۴۵) (۴۴۶) (۴۴۷) (۴۴۸) (۴۴۹) (۴۵۰) (۴۵۱) (۴۵۲) (۴۵۳) (۴۵۴) (۴۵۵) (۴۵۶) (۴۵۷) (۴۵۸) (۴۵۹) (۴۶۰) (۴۶۱) (۴۶۲) (۴۶۳) (۴۶۴) (۴۶۵) (۴۶۶) (۴۶۷) (۴۶۸) (۴۶۹) (۴۷۰) (۴۷۱) (۴۷۲) (۴۷۳) (۴۷۴) (۴۷۵) (۴۷۶) (۴۷۷) (۴۷۸) (۴۷۹) (۴۸۰) (۴۸۱) (۴۸۲) (۴۸۳) (۴۸۴) (۴۸۵) (۴۸۶) (۴۸۷) (۴۸۸) (۴۸۹) (۴۹۰) (۴۹۱) (۴۹۲) (۴۹۳) (۴۹۴) (۴۹۵) (۴۹۶) (۴۹۷) (۴۹۸) (۴۹۹) (۵۰۰) (۵۰۱) (۵۰۲) (۵۰۳) (۵۰۴) (۵۰۵) (۵۰۶) (۵۰۷) (۵۰۸) (۵۰۹) (۵۱۰) (۵۱۱) (۵۱۲) (۵۱۳) (۵۱۴) (۵۱۵) (۵۱۶) (۵۱۷) (۵۱۸) (۵۱۹) (۵۲۰) (۵۲۱) (۵۲۲) (۵۲۳) (۵۲۴) (۵۲۵) (۵۲۶) (۵۲۷) (۵۲۸) (۵۲۹) (۵۳۰) (۵۳۱) (۵۳۲) (۵۳۳) (۵۳۴) (۵۳۵) (۵۳۶) (۵۳۷) (۵۳۸) (۵۳۹) (۵۴۰) (۵

$$(۶) ' (۷) - = -$$

۳۰۔ یہ متماثلہ ثابت کرو

$$(\text{ع} - ۲۷) = (\text{ع} - ۳۷) (\text{ع} - ۱۲) (\text{ع} - ۲)$$

$$+ ۲۷ (\text{گ} + ۲) (\text{گ} - ۲)$$

اسکو اس طرح ثابت کیا جاسکتا ہے :- ع اور جے کی قیمتوں میں ۱ = رکھنے سے اور پھیلانے سے یہ فوراً معلوم ہوتا ہے کہ ۵ کا وہ حصہ جس میں ۱ نہیں آتا شکل

$$۱ (۱ - ۹) + ۲ (۲ - ۱) (۲ - ۱) (۲ - ۱) (۲ - ۱) (۲ - ۱)$$

میں تحویل کیا جاسکتا ہے -

اب ۱، ۱، ۱، ۱ کی جگہ ۱، ۱، ۱، ۱ رکھنے سے اور ان مقداروں کی بجائے دفعہ ۳ کی قیمتیں درج کرنے سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے -

۳۱۔ جب چار درجہ کی دو اصلیں مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ یو لڑکے

کبھی کی دو اصلیں مساوی ہوتی ہیں جنہی مشترک قیمت

$$۳ - ۵۲ = ۷$$

$$۷$$

ہے اور پھر یہ ثابت کرو کہ اس صورت میں چار درجہ کی باقی دو اصلیں حقیقی ہیں یا مساوی یا خیالی ہو جب اسکے کہ ۵۲ - ۷ = ۳ - ۱ جے منفی ہو یا منفر یا مثبت

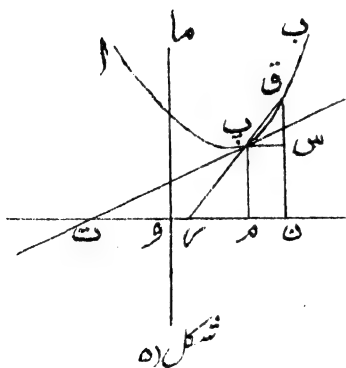
۳۲۔ ثابت کرو کہ (۱) جب چار درجہ کی مساوی اصلوں کے دو مختلف زوج ہوں تو مربع دار فرقوں کی مساوات کی آخری دو نہیں (دفعہ ۶) معدوم ہو جاتی ہیں اور شرطیں ۵ = ۷۲ - ۷ = ۳ - ۱ جے ۰ حاصل ہوتی ہیں اور یہ کہ (۲) جب اسکی تین اصلیں مساوی ہوں تو اس مساوات کی آخری تین رقمیں معدوم ہو جاتی ہیں اور شرطیں ۷ = ۰ جے ۰ حاصل ہوتی ہیں -

قبل الذکر صورت میں بناؤ کہ یہ شرطیں ان شرطوں کے ساتھ مماثلت رکھتی ہیں جو مثال ۳۲ دفعہ ۶۱ اور مثال ۱۲ صفحہ (۲۱۷) میں حاصل ہوئی ہیں۔ نیز یہ بھی ثابت کرو کہ مربع دار فرقوں کی مساوات قبل الذکر صورت میں فذ^۱ (۱۲۷ + ۱۲۷ھ) میں اور موزن الذکر صورت میں فذ^۲ (۱۲۷ + ۱۲۷ھ) میں تحویل ہوتی ہے۔

(154)

مسائل اول باب مشق تفاعلوں کے خواص

۶۹۔ مشق تفاعل کی ترسیمی تعبیر



فرض کرو کہ کثیر الارقام ف (لا)
کو تعبیر کرنیوالا تختی ا پ ب
ہے اور اس پر پ وہ نقطہ
ہے جو متغیر لا = و م کی کسی
قیمت کے جواب میں ملتا ہو
اب ہم نقطہ پ پر ت (لا)
کی قیمت تعبیر کر نیکار طریقتہ
معلوم کریں گے۔ تختی پر دوسرا

نقطہ قی لو جو لا کی ایسی قیمت کے جواب میں ہو جو و م سے بقدر ایک چھوٹی
مقدار ہ کے بڑی ہو۔ اس طرح

$$و م = لا ' م ن = ہ ' و ن = لا + ہ$$

$$پ م = ف (لا) ' ق ن = ف (لا + ہ)$$

دفعہ ۶ کے پھیلاؤ کی رو سے

$$ف (لا + ہ) = ف (لا) + ف (لا) + ہ \frac{ف (لا)}{۲ \times ۱} + ہ \dots\dots\dots + ۲$$

$$\text{یعنی } ف (لا + ہ) - ف (لا) = \frac{ف (لا)}{۲ \times ۱} + ف (لا) + ہ \dots\dots\dots + ۱$$

$$\text{لیکن } ف (لا + ہ) - ف (لا) = \frac{ف (لا)}{۲ \times ۱} = \frac{ف (لا)}{۲ \times ۱} = \frac{ف (لا)}{۲ \times ۱}$$

$$مس ق پ تس = مس پ کر ن$$

اب اگر ہ کو غیر محدود گھٹا دیا جائے تو ق، پ کے نزدیک آتا ہے اور بالآخر اس پر منطبق ہو جاتا ہے، تو تر پ ق، نقطہ پ پر منحنی کا ماس بن جاتا ہے کہ زاویہ پ کر ن، پ ت م ہو جاتا ہے۔ نیز مساوات (۱) کی دائیں جانب کی تمام زمیں سوائے پہلی رقم کے غیر محدود گھٹ جاتی ہیں اور بالآخر ہ =۔ کے لئے معدوم ہوتی ہیں۔ اس لئے مساوات (۱) ہو جاتی ہے

(155)

$$مس پ ت م = ف (لا)$$

جس سے ہم نتیجہ نکالتے ہیں کہ لا کی کسی قیمت کو درج کرنے سے مشق تفاعل ف (لا) جو قیمت اختیار کرتا ہے وہ اس زاویہ کے ماس سے تعبیر ہوتی ہے جو تفاعل ف (لا) کو تعبیر کرنیوالے منحنی کے متناظر نقطہ پر کا ماس محور لا کے ساتھ بناتا ہے۔

۷۔ کشیر الارقام کی اعظم اور اقل قیمتیں۔ لا کی کوئی قیمت جو ف (لا) کو اعظم یا اقل بنادے مشق مساوات ف (لا) = : کی ایک اہل ہوتی ہے۔ فرض کر دو کہ لا کو قیمت عہ دینے سے ف (لا) اقل ہوتا ہے۔ ہم ثنا کرینگے کہ ف (لا) =۔ فرض کر دو کہ ہ سے لا کا چھوٹا اضافہ یا چھوٹا گھٹا تعبیر ہوتا ہے۔ اب چونکہ ف (عہ) اقل ہے اسلئے

ف (ع) > ف (ع + ۵) نیز ف (ع) > ف (ع - ۵)
پس ف (ع + ۵) - ف (ع) اور ف (ع - ۵) - ف (ع) دونوں مثبت
ہیں یعنی ذیل کے دو جملے مثبت ہیں:-

$$ف (ع) + ۵ \frac{ف (ع)}{۲ \times ۱} + ۵^۲ + \dots$$

$$- ف (ع) + ۵ \frac{ف (ع)}{۲ \times ۱} - ۵^۲ - \dots$$

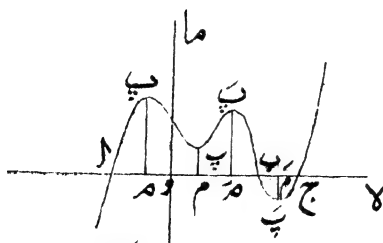
اب ہم یہ جانے ہیں کہ جب ۵ بہت چھوٹا ہو تو ان جملوں کی علامتیں وہی
ہوتی ہیں جو انکی پہلی رشتوں کی ہیں۔ پس دونوں جملوں کو مثبت ہونیکے لئے
ف (ع) کو معدوم ہونا چاہئے اور علاوہ ازیں ف (ع) کو مثبت ہونا چاہئے۔
بالکل اسی طرح کے ثبوت سے یہ معلوم ہوگا کہ جب ۵ (ع) اعظم ہو تو

ف (ع) = - اور ف (ع) کو منفی ہونا چاہئے۔ اسلئے کثیر الار تمام

ف (لا) کی اعظم اور اقل قیمتوں کو معلوم کرنیکے لئے مساوات ف (لا) = ۰ کو
حل کر کے اسکی اصلوں کو ف (لا) میں درج کرنا چاہئے۔ ہر اصل سے ایک
اعظم یا اقل قیمت ملے گی اور اعظم یا اقل قیمت کا امتیاز ف (لا) کی علامت سے
ہوگا جب اس میں لا کی بجائے وہ اصل درج کجائے چنانچہ جب ۵ (لا) منفی

ہو تو قیمت اعظم ہوگی اور جب ۵ (لا) مثبت ہو تو قیمت اقل۔

(156)



شکل (۶)

اس دفعہ کا مسئلہ
دفعہ ۶۹ کے عمل سے
فوراً حاصل ہوتا ہے
کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ
جب ۵ (لا) کی قیمت
اعظم ہو جیسے پ پ

(شکل ۶) پر یا اقل ہو جیسے پ، پ پر تو منحنی کا محاس محور وکلا کے متوازی ہو گا اور اس لئے

مس پات مر = ف (لا) =
شکل ۶ پانچویں درجہ کے کثیرالار قیام کو تعبیر کرتی ہے۔ ف (لا) = کی
چار اصلوں کے جواب میں (جنکا حقیقی ہونا اس صورت میں فرض کر لیا گیا ہے)
یعنی و م، و م، و م کے جواب میں دو اعظم قیمتیں م پ، م پ
اور دو اقل قیمتیں م پ، م پ ہیں۔

مثالیں

$$۱ - ف (لا) \equiv ۲ + لا - ۶$$

کی اعظم یا اقل قیمت معلوم کرو۔

$$ف (لا) = ۱ + لا، ف (لا) = ۴$$

$$لا = -\frac{۱}{۴} \text{ سے } ف (لا) = -\frac{۴}{۸} \text{ اور یہ اقل قیمت ہے۔}$$

(دیکھو شکل ۲ صفحہ ۲۰)

$$۲ - ف (لا) \equiv ۲ لا - ۳ لا - ۶ لا + لا + ۱۴$$

کی اعظم اور اقل قیمتیں معلوم کرو۔

$$ف (لا) = ۶ (لا - لا - ۶)، ف (لا) = ۶ (لا - لا - ۱)$$

$$لا = -۲ \text{ سے } ف (لا) = ۶۸ \text{ جو اعظم قیمت ہے۔}$$

$$لا = ۳ \text{ سے } ف (لا) = -۶۴ \text{ جو اقل قیمت ہے۔}$$

$$۳ - ف (لا) \equiv ۳ لا - ۱۶ لا + لا - ۱۴ لا + لا + ۷$$

کی اعظم اور اقل قیمتیں معلوم کرو۔

یہاں ف (لا) = کی صرف ایک حقیقی اصل ہے لا = ۴ اور اس سے

$$اقل قیمت حاصل ہوتی ہے ف (لا) = -۳۴۵$$

$$۴ - ف (لا) \equiv ۱۰ لا - ۱۴ لا + لا + ۶$$

کی اعظم اور اقل قیمتیں معلوم کرو۔
 ف (لا) کی اصلیں تقریبی طور پر ۰.۲، ۰.۳، ۰.۴، ۰.۵، ۰.۶، ۰.۷، ۰.۸، ۰.۹ ہیں۔ پہلی اصل سے
 اعظم قیمت اور دوسری سے اقل قیمت حاصل ہوتی ہے۔ (دیکھو شکل ۳ صفحہ ۲۱)۔
 ۱۔ رول کا مسئلہ۔ مساوات ف (لا) = کی دو متصل حقیقی
 اصولوں ۱ اور ۲ کے درمیان مساوات ف (لا) = کی کم از کم ایک
 حقیقی اصل واقع ہوتی ہے۔

چونکہ ف (لا) کو مسلسل تفاعل مان لیا گیا ہے اسلئے جب 'لا' سے
 ب تک بڑھتا ہے تو ف (۱) سے ف (ب) تک جانے میں ف (لا)
 کو ابتدا بڑھنا اور پھر گھٹنا چاہیے یا ابتدا گھٹنا اور پھر بڑھنا چاہیے۔ اس لئے
 ف (۱) سے ف (ب) تک جانے میں اس کو کم از کم ایک اعظم یا اقل قیمت
 میں سے گزرنا چاہیے۔ یہ قیمت (فرض کرو ف (ع)) ۱ اور ۲ کے درمیان
 لا کی کسی قیمت ع کے جواب میں ہوگی جو دفعہ ۱ کے مسئلہ سے مساوات
 ف (لا) = کی ایک اصل ہے۔

دفعہ مابقی کی شکل سے اس مسئلہ کی توضیح ہوتی ہے۔ ہم اس شکل میں
 دیکھتے ہیں کہ دو نقاط تقاطع ۱ اور ۲ کے درمیان تین اعظم یا اقل قیمتیں ہیں اور
 دو نقطوں ۲ اور ۳ کے درمیان ایسی صرف ایک قیمت ہے۔ شکل
 سے یہ بھی ظاہر ہے کہ دو متصل نقاط تقاطع کے درمیان ایسی قیمتوں کی تعداد
 طاق ہوتی ہے۔

نتیجہ صریح۔ مشق مساوات کی دو متصل اصولوں کے درمیان
 ابتدائی مساوات کی کسی اصل کا ہونا ضروری نہیں ہو اور کسی صورت میں
 بھی ان کے درمیان ابتدائی مساوات کی ایک سے زیادہ اصل نہیں ہو سکتی
 اس مسئلہ کے پہلے حصہ سے صرف اس امر کی وضاحت ہوتی ہے کہ

ایک کثیر لاف نام کی دو متعلقہ صفر قیمتوں کے درمیان متعدد اعظم اور اقل قیمتیں ہو سکتی ہیں۔ اس کا دوسرا حصہ مسئلہ بالا سے فوراً اخذ ہو سکتا ہے کیونکہ اگر ف (لا) = کی دو متعلقہ اصلوں کے درمیان ف (لا) = کی ایک سے زیادہ اصلیں ہو تو ف (لا) = کی دو اصلیں ایسی ہونگی جن کے درمیان ف (لا) = کی کوئی اصل نہیں ہوگی اور یہ رول کے مسئلہ کے خلاف ہے۔

۲۔ - مشق تفاعلوں کی ترکیب - فرض کر دو کہ مساوات ف (لا) = کی اصلیں ع_۱، ع_۲، ع_۳، ع_۴، ع_۵، ع_۶ ہیں تو

ف (لا) = (لا - ع_۱) (لا - ع_۲) (لا - ع_۳) (لا - ع_۴) (لا - ع_۵) (لا - ع_۶)
اس تمنا کے لئے لا کی بجائے ما + لا درج کرو تو
ف (ما + لا) = (ما + لا - ع_۱) (ما + لا - ع_۲) (ما + لا - ع_۳) (ما + لا - ع_۴) (ما + لا - ع_۵) (ما + لا - ع_۶)
= ما^۶ + ق_۱ ما^۵ + ق_۲ ما^۴ + ق_۳ ما^۳ + ق_۴ ما^۲ + ق_۵ ما + ق_۶

(158) جہاں

ق_۱ = لا - ع_۱ + لا - ع_۲ + لا - ع_۳ + لا - ع_۴ + لا - ع_۵ + لا - ع_۶
ق_۲ = (لا - ع_۱) (لا - ع_۲) + (لا - ع_۱) (لا - ع_۳) + (لا - ع_۲) (لا - ع_۳) + (لا - ع_۱) (لا - ع_۴) + (لا - ع_۲) (لا - ع_۴) + (لا - ع_۳) (لا - ع_۴) + (لا - ع_۱) (لا - ع_۵) + (لا - ع_۲) (لا - ع_۵) + (لا - ع_۳) (لا - ع_۵) + (لا - ع_۱) (لا - ع_۶) + (لا - ع_۲) (لا - ع_۶) + (لا - ع_۳) (لا - ع_۶) + (لا - ع_۴) (لا - ع_۵) + (لا - ع_۴) (لا - ع_۶) + (لا - ع_۵) (لا - ع_۶)
ق_۳ = (لا - ع_۱) (لا - ع_۲) (لا - ع_۳) + (لا - ع_۱) (لا - ع_۲) (لا - ع_۴) + (لا - ع_۱) (لا - ع_۲) (لا - ع_۵) + (لا - ع_۱) (لا - ع_۲) (لا - ع_۶) + (لا - ع_۱) (لا - ع_۳) (لا - ع_۴) + (لا - ع_۱) (لا - ع_۳) (لا - ع_۵) + (لا - ع_۱) (لا - ع_۳) (لا - ع_۶) + (لا - ع_۱) (لا - ع_۴) (لا - ع_۵) + (لا - ع_۱) (لا - ع_۴) (لا - ع_۶) + (لا - ع_۱) (لا - ع_۵) (لا - ع_۶) + (لا - ع_۲) (لا - ع_۳) (لا - ع_۴) + (لا - ع_۲) (لا - ع_۳) (لا - ع_۵) + (لا - ع_۲) (لا - ع_۳) (لا - ع_۶) + (لا - ع_۲) (لا - ع_۴) (لا - ع_۵) + (لا - ع_۲) (لا - ع_۴) (لا - ع_۶) + (لا - ع_۲) (لا - ع_۵) (لا - ع_۶) + (لا - ع_۳) (لا - ع_۴) (لا - ع_۵) + (لا - ع_۳) (لا - ع_۴) (لا - ع_۶) + (لا - ع_۳) (لا - ع_۵) (لا - ع_۶) + (لا - ع_۴) (لا - ع_۵) (لا - ع_۶)

ق_۴ = (لا - ع_۱) (لا - ع_۲) (لا - ع_۳) (لا - ع_۴) + (لا - ع_۱) (لا - ع_۲) (لا - ع_۳) (لا - ع_۵) + (لا - ع_۱) (لا - ع_۲) (لا - ع_۳) (لا - ع_۶) + (لا - ع_۱) (لا - ع_۲) (لا - ع_۴) (لا - ع_۵) + (لا - ع_۱) (لا - ع_۲) (لا - ع_۴) (لا - ع_۶) + (لا - ع_۱) (لا - ع_۲) (لا - ع_۵) (لا - ع_۶) + (لا - ع_۱) (لا - ع_۳) (لا - ع_۴) (لا - ع_۵) + (لا - ع_۱) (لا - ع_۳) (لا - ع_۴) (لا - ع_۶) + (لا - ع_۱) (لا - ع_۳) (لا - ع_۵) (لا - ع_۶) + (لا - ع_۱) (لا - ع_۴) (لا - ع_۵) (لا - ع_۶) + (لا - ع_۲) (لا - ع_۳) (لا - ع_۴) (لا - ع_۵) + (لا - ع_۲) (لا - ع_۳) (لا - ع_۴) (لا - ع_۶) + (لا - ع_۲) (لا - ع_۳) (لا - ع_۵) (لا - ع_۶) + (لا - ع_۲) (لا - ع_۴) (لا - ع_۵) (لا - ع_۶) + (لا - ع_۲) (لا - ع_۵) (لا - ع_۶) + (لا - ع_۳) (لا - ع_۴) (لا - ع_۵) (لا - ع_۶) + (لا - ع_۳) (لا - ع_۵) (لا - ع_۶) + (لا - ع_۴) (لا - ع_۵) (لا - ع_۶)

لیکن

ف (ما + لا) = ف (لا) + ف (لا) ما + ف (لا) $\frac{ما^۲}{۲ \times ۱}$ + + ما^۶

اسلئے

چونکہ ف (لا) سے ف (لا) اسی طرح حاصل ہوتا ہے جس طرح
ف (لا) سے ف (لا) اسلئے ابھی ثابت کئے ہوئے مسئلہ سے یہ ظاہر ہے کہ
ف (لا) میں (لا - عم) - ۲ - جزو ضربی کے طور پر شامل ہوگا۔ تیسرے مشتق
تفاعل ف (لا) میں (لا - عم) - ۲ - شامل ہوگا اور علیٰ ہذا۔

نتیجہ صریح ۲۔ اگر ف (لا) اور اسکے پہلے (م - ۱) مشتق تفاعل
سب کے سب لا کی قیمت عم کے لئے معدوم ہو جائیں تو (لا - عم) - ۲
ف (لا) کا جزو ضربی ہوگا۔

یہ پچھلے نتیجہ صریح کا عکس ہے اور بلاد واسطہ آسانی کے ساتھ یوں ثابت کیا جاسکتا
ہے۔ مشتق تفاعلوں کو ف (لا) - ۱، ف (لا) - ۲، ...، ف (لا) - م سے تعبیر کرو
(دیکھو دفعہ ۶) اور لا کی بجائے عم + لا - عم درج کرو تو ف (لا) کو شکل ذیل
میں پھیلا یا جاسکتا ہے:-

$$\begin{aligned} & \text{ف (عم)} + \text{ف (لا - عم)} + \frac{\text{ف (عم)}^2}{2 \times 1} + \dots + \frac{\text{ف (عم)}^m}{m \times \dots \times 2 \times 1} \\ & + \frac{\text{ف (عم)}^{m-1}}{(1-m) \times \dots \times 2 \times 1} + \dots + \frac{\text{ف (عم)}^{m-2}}{(2-m) \times \dots \times 2 \times 1} + \dots \\ & + \frac{\text{ف (عم)}^n}{n \times \dots \times 2 \times 1} \end{aligned}$$

جس سے مسئلہ کی صداقت ظاہر ہے۔

۴۔۔۔ ضعفی اصولوں کی تعین۔ پچھلے دفعہ سے آسانی کے ساتھ یہ نتیجہ

نکالا جاسکتا ہے کہ اگر ف (لا) اور ف (لا) کا مشترک جزو ضربی (لا - عم) - ۱ -
ہو تو (لا - عم) - ۱ - ف (لا) کا ایک جزو ہوگا۔ کیونکہ نتیجہ صریح (۱) کی رو سے

ف (لا) کے بعد کے (م - ۳) مشتق تفاعل 'ف (لا) اور ف (لا) کے ساتھ معدوم ہوتے ہیں جبکہ لا = عہ - پس ف (لا) کی ایک اصل م رتبہ کی ہے۔ اسی طرح یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر ف (لا) اور ف (لا) کے دوسرے مشترک اجزائے ضربی

$$(لا - ب) \quad (لا - جہ) \quad (لا - ضہ) \quad (لا - ا) \quad \text{وغیرہ}$$

ہوں تو مساوات ف (لا) = کی ف اصلیں بہ کے مساوی ہوں گی 'ق اصلیں جہ کے مساوی 'ر اصلیں ضہ کے مساوی کو غیرہ۔ اس لئے یہ معلوم کر نیکے لئے کہ کسی مجوزہ مساوات کی ضعیفی اصلیں موجود ہیں یا نہیں اور اگر موجود ہیں تو ان کی تعین کے لئے ہمیں ف (لا) اور ف (لا) کا مشترک مقسوم علیہ غلط معلوم کرنا چاہئے۔ فرض کر دیے ف (لا) ہے تو مساوی اصلوں کی تعین مساوات ف (لا) = کے حل پر منحصر ہوگی۔

مثالیں

(160)

۱ - مساوات

$$لا^۳ + لا^۲ - لا^۱۶ + لا^۲۰ = ۰$$

کی ضعیفی اصلیں معلوم کرو۔

ف (لا) اور ف (لا) کا مقسوم علیہ اعظم لا - ۲ ہے۔ پس (لا - ۲) '۲

ف (لا) کا ایک جزو ضربی ہے۔ دوسرا جزو لا + ۵ ہے۔

ف (لا) کے ضعیفی اجزائے ضربی کو معلوم کر نیکے بعد اگر باقی اجزائے ضربی حاصل کرنا ہو تو

دفعہ ۸ کا تقسیم کا طریقہ متواتر استعمال کرنا سہولت بخش ہوگا۔ مثلاً یہاں ہم لا - ۲ سے دو مرتبہ تقسیم کرتے ہیں، عمل حساب کا طریقہ ذیل میں درج ہے :-

$$\begin{array}{r} ۱۶ - ۱۶ \\ ۲۰ - ۲۰ \\ \hline ۱۰ - ۱۰ \\ ۳ - ۳ \\ \hline ۵ \end{array}$$

اس طرح دوسرا اور ۵ باقی رہ جاتے ہیں یعنی تیسرا جزو ضربی لا + ۵ ہے۔
اس عمل سے گذشتہ نتیجہ کی تصدیق ہوتی ہے کہ ہر تقسیم کے بعد باقی معدوم ہوتے ہیں
جیسا کہ ہونا چاہئے۔

۲۔ مساوات

$$۱۰ - لا + لا^۲ + لا^۳ - ۶ = ۰$$

کی ضعیفی اصلیں اور بقیہ جزو ضربی معلوم کرو۔

ف (لا) اور ف (لا) کا مقسوم علیہ اعظم لا - لا + ۱ ہے۔ پس (لا - ۱) ۳
ف (لا) کا ایک جزو ضربی ہے۔ لا - ۱ سے تین مرتبہ متواتر تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا
ف (لا) = (لا - ۱) ۲ (لا + لا ۳ + لا ۶)

۳۔ مساوات

$$۲ - لا^۲ - لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ - ۳۶ = ۰$$

کی ضعیفی اصلیں معلوم کرو۔

ف (لا) اور ف (لا) کا مقسوم علیہ اعظم لا - لا - ۶ ہے۔ اس کے اجزا
لا + ۲ اور لا - ۳ ہیں۔ پس

$$ف (لا) = (لا - ۲) (لا + ۳)$$

۴۔ کثیرالارقام

$$۸ - لا^۵ + لا^۵ + لا^۵ - لا^۹ - لا^۱۲ - لا^۱۵ + لا^۱۸ = ۰$$

کے تمام اجزائے ضربی معلوم کرو۔

جواب :- ف (لا) = (لا - ۱) (لا + ۱) (لا - ۲) ۲

کثیرالارقام اور اسکے پہلے مشق کا مقسوم علیہ اعظم معلوم کرنے کا معمولی عمل بہت
محنت طلب ہوتا جائیگا جیسے جیسے تفاعل کا درجہ بڑھتا جائیگا۔ اسلئے یہ کہنا (جیسا کہ سادہ لکھنے لفظ
کی اکثر کتابوں میں کہا جاتا ہے) غلط ہے کہ عددی مساواتوں کی ضعیفی اصولوں کو معلوم کرنے کا
یہ طریقہ سادہ طریقہ ہے اور یہ کہ وہ اصولوں کے متعلق مزید تحقیقات کے لئے ضروری ہے۔
اسٹرم (Sturm) کے مسئلہ کے سلسلہ میں اس طریقہ کی کچھ عملی قدر و قیمت
ہے۔ ہم ضعیفی اصولوں کی بحث کو دسویں باب تک ملتوی کرتے ہیں جہاں اس مسئلہ پر

غور کیا جائیگا۔ نیز گیارہویں باب میں یہ بتایا جائیگا کہ چھٹے درجہ سے کم درجوں کی مساواتوں کی وضعی اصلیں کسی مخصوص مثال میں سادہ طریقوں سے معلوم ہو سکتی ہیں جنہیں مقسم علیہ نکالنے کی ضرورت نہیں پڑتی۔

۵۔ اس دفعہ اور اگلے دفعہ میں وہ مسئلے بیان کئے جائیں گے جو مساواتوں کی اصلوں کو جدا کر نیکے طریقوں کی آئینوالی بحث میں بہت اہم اور کار آمد ثابت ہونگے۔

مسئلہ۔ مساوات ف (لا) = کی حقیقی اصل عہ سے ذرا

چھوٹی لا کی قیمت عہ۔ ہ سے ذرا بڑی قیمت عہ + ہ تک مسلسل گزرنے میں کثیر الارقام ف (لا) اور ف (لا) کی علامتیں اصل میں سے گزرنے سے عین پہلے مختلف ہوتی ہیں اور گزرنیکے عین بعد موافق ف (لا) اور ف (لا) میں لا کی بجائے عہ۔ ہ درج کرنے سے اور اور پھیلانے سے

$$ف(عہ - ہ) = ف(عہ) - ف(عہ) + ہ \frac{ف(عہ)}{۲ \times ۱} - ہ \dots$$

ف (عہ - ہ) = ف (عہ) - ف (عہ) + ہ
اب چونکہ ف (عہ) = اسلئے ان جلوں کی علامتیں انکی پہلی رقموں پر منحصر ہونگی وجہ سے مختلف ہیں۔ اگر ہ کی علامت بدلے جائے تو ان جلوں کی علامتیں ایک ہی ہوتی ہیں۔ اسلئے مسئلہ ثابت ہو گیا۔

نتیجہ صریح۔ مسئلہ بالا درست رہتا ہے جب عہ مساوات

ف (لا) = کی کسی رتبہ کی وضعی اصل ہو۔

فرض کرو کہ اصل ر مرتبہ تکرار پاتی ہے تو ذیل کے تقاضے (جنہیں زیر کی بجائے لاحق استعمال ہوئے ہیں) سب کے سب معدوم ہوتے ہیں:-

$$ف(عہ) ف(عہ) ف(عہ) ف(عہ) \dots ف(عہ) ف(عہ)$$

(162)

ف (عہ - ۵) اور ف (عہ - ۵) کے سلسلوں میں وہ پہلی رتیمیں جو معدوم نہیں ہوتیں یہ ہیں

$$\frac{ف (عہ) (۵ - ۱)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵} \quad \frac{ف (عہ) (۵ - ۱)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵}$$

ظاہر ہے کہ انکی علامتیں مختلف ہیں، لیکن جب '۵' کی علامت کو تبدیل کیا جاتا ہے تو ان رتیموں کی علامتیں وہی ہو جاتی ہیں۔ پس مسئلہ درست ہے۔

۷۶ - سلسلہ

ف (لا)، ف (لا)، ف (لا)، ف (لا)، ف (لا)، ف (لا)، ف (لا)

کے ہر دو متصلہ تفاعلوں پر دفعہ مابقی کا استدلال جاری کیا جائے تو سلسلہ کو عام صورت میں یوں بیان کیا جاسکتا ہے :-

مسئلہ - جب کسی مساوات ف (لا) = کی ایک اصل رتبہ

کی ہو اور عہ سے ذرا کم قیمت لا کو دیجائے تو اس سلسلہ کے رتفاعلوں کی علامتیں باری باری سے مثبت اور منفی یا منفی اور مثبت ہونگی لیکن عہ سے ذرا بڑی قیمت لا کو دیجائے تو یہ سب تفاعل ہم علامت ہونگے اور مزید بریں یہ علامت وہی ہوگی جو ف (عہ) کی ہے

یعنی اس پہلے تفاعل کی جو لا کی بجائے عہ درج کرنے سے معدوم نہیں ہوتا اس مسئلہ کے استعمال کو پوری طرح ذہن نشین کرنے کے لئے فرض کر لیں

ف (عہ) وہ پہلا تفاعل ہے جو لا کی بجائے عہ درج کرنے سے معدوم نہیں ہوتا اور فرض کرو کہ اسکی علامت منفی ہے۔ اس مسئلہ سے جو نتیجہ اخذ کیا جاسکتا ہے وہ یہ ہے کہ لا کی قیمت عہ - ۵ کے لئے تفاعلوں کے سلسلہ ف، ف، ف، ف، ف، ف، ف کی علامتیں ہیں

اور لا کی قیمت $ع + ۵$ کے لئے انہی علامتیں ہیں

کیونکہ اصل میں سے گزرنے سے پہلے $ف$ کی علامت $ف$ کی علامت سے مختلف ہونی چاہئے، $ف$ کی علامت $ف$ سے مختلف ہونی چاہئے اور علیٰ ہذا اور اصل میں سے گزرنے کے بعد سب تفاعلوں کی علامتیں وہی ہونی چاہئیں۔ یہاں ہم نے فی الحقیقت یہ تسلیم کیا ہے کہ ۵ استفادہ ہوتا ہے کہ $ف$ (لا) =۔ کی کوئی اصل اس وقفہ کے اندر داخل نہیں ہوتی جس میں سے لا گزرتا ہے۔

مثالیں

(163)

۱۔ مساوات

$$ف (لا) \equiv لا + ۱۲ لا + ۳۲ لا - ۲۴ لا + ۴ = ۰$$

کی ضعیفی اصلیں معلوم کرو۔

جواب :- $ف (لا) \equiv (لا + ۶ لا - ۲)$

۲۔ ثابت کرو کہ ثنائی مساوات

$$لا - ۱ = ۰$$

میں مساوی اصلیں نہیں ہو سکتیں۔

۳۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$لا - ۱ = ۰$$

کی دو اصلیں مساوی ہونگی اگر

$$ق = ۱ - ۱$$

۴۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$L^0 + \omega L^1 + \omega^2 L^2 + \dots = Q.$$

کی دو اعلیٰ مساوی ہونگی اگر ق^۱ + م^۲ ف^۵ =۔ اور یہ کہ اگر مساوی اصولوں کا ایک زوج موجود ہو تو مساوی اصولوں کا ایک دوسرا زوج بھی موجود ہونا چاہئے۔

۵۔ دفعہ ۴ کا طریقہ استعمال کر کے وہ بشرط معلوم کر دے کہ کبھی مساوات ی^۱ + م^۲ ھ^۳ ی^۴ + گ^۵ =۔

کی دو اسیلیں مساوی ہوں۔ نیکے عمل میں آخری باقی کو معدوم ہو جانا چاہئے۔
مقسوم علیہ اعظم معلوم کر نیکے عمل میں آخری باقی کو معدوم ہو جانا چاہئے۔

جواب :- گی + ۱ + ۲ = ۳

۶۔ اسی طریقہ کو استعمال کر کے بتاؤ کہ گنگ اور ھ دونوں معدوم ہوتے

یہیں جب کعبی کی تین اعلیٰ مساوی ہوں۔

۷۔ اگر چار درجہ ف (لا) =۔ کی اصلیں عہدہ، جبہ، ضہ ہوں تو ثابت کر دو کہ جب کبھی کی تین اصلیں مساوی ہوں۔

فَ (ع) + فَ (ي) + فَ (ج) + فَ (ض)

۸۔ اگر ف (لا) = کی اصلیں ع، ہ، جہ، ضہ، وغیرہ ہوں اور ف (لا) =

کی اصلیں عہ، پہ، جہ، ضہ، وغیرہ تو ثابت کر دے کہ

فَ (ع) فَ (بِ) فَ (جہ) فَ (ضہ) لَف (عَد) ف (یہ) ف (جہ) ...
اور یہ کہ ہر ایک اعراسادات کی رقم مطلق کے مساوی ہے جسکی اصلیں فرق تو کئے
میں ہیں۔

۹۔ اگر مساوات

کی ایک دوسری اصل عہ ہوتو ثابت کرو کہ عہ مساوات

$$f_1^{(1)} + f_2^{(1)} + \dots + f_n^{(1)} = \dots$$

(164)

کی ایک اصل ہے۔

۱۰۔ بتاؤ کہ کبھی

$$۱ لا + ۳ ب لا + ۳ ج لا + د$$

کی اعظم اور اقل قیمتیں مساوات

$$۱ لا - ۲ مر - ۲ گ مر + ۵ = ۰$$

کی اصلیں ہیں جہاں ۵ مینر ہے۔

ف (لا) کو تعبیر کریں گے منفی کو اگر محور یا کے متوازی (دیکھو دفعہ ۱۰) اعظم یا اقل قیمت مر کے مساوی فاصلے میں سے حرکت دیجائے تو محور لا منفی کا جاس ہو جائیگا یعنی مساوات ف (لا) - مر = ۰ مساوی اصلیں رکھنے گی۔ پس اعظم اور اقل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں ف (لا) - مر کا مینر بنانے سے یا گ + ۴ ہ = ۰ میں د کی بجائے د - مر رکھنے سے۔

۱۱۔ اسی طرح ثابت کرو کہ

$$۱ لا + ۴ ب لا + ۶ ج لا + ۴ د لا + س$$

کی اعظم اور اقل قیمتیں مساوات

$$۱ لا - ۳ مر - ۳ (د ع - ۹ ہ) مر + ۳ (د ع - ۱۸ ہ ج) مر - ۵ = ۰$$

کی اصلیں ہیں جہاں ۵ چار درجی کا مینر ہے۔

۱۲۔ تفاعل

$$ف (لا) = لا - ۷ لا + ۱۵ لا - ۳ لا + ۴$$

پر دفعہ ۶ کا مسئلہ استعمال کرو۔

یہاں

$$ف (لا) = لا - ۴ لا - ۲۱ لا + ۳۰ لا - ۱۳$$

$$ف (لا) = ۲ (۲۱ لا - ۲۱ لا + ۱۵)$$

$$ف (لا) = ۲ (۲۱ لا - ۱۲ لا)$$

$$ف (لا) = ۲۴$$

یہاں ف (لا) پہلا تفاعل ہے جو معدوم نہیں ہوتا جبکہ لا = ۱ اور

فہ (۱) منفی ہے۔ مسئلہ سے یہ ثابت ہے کہ ایک سے ذرا کم قیمت کے لئے
 ف، ف، فہ کی علامتیں ہیں + - + - اور ایک سے ذرا بڑی
 قیمت کے لئے ان سب کی علامتیں منفی ہیں۔ علامتوں کے اس سلسلہ سے ہم
 تفاعلوں ف، ف، وغیرہ کو نقطہ لا = ۱ کے قرب میں مرتب کر سکتے ہیں۔ چنانچہ
 ف (لا) کو تعبیر کریو لانگنی ضعیفی نقطہ لا = ۱ تک پہنچنے سے قبل محور لا کے
 اوپر ہے اور پہنچنے کے عین بعد محور کے نیچے اور محور منفی کو تین منطبق نقطوں پر قطع
 کرتا ہے کیونکہ ف (لا) کا ایک جزو ضربی (لا - ۱) ہے۔ ف (لا) کو تعبیر
 کریو لانگنی نقطہ لا = ۱ میں سے گزرنے سے پہلے اور بعد دونوں صورتوں میں
 محور کے اوپر ہوگا۔ وہ محور کو اس نقطہ پر مس کریگا۔ فہ (لا) کو تعبیر کرنے والا
 منفی نقطہ میں سے گزرنے سے پہلے محور کے اوپر اور گزرنے کے بعد محور کے نیچے ہوگا اور
 محور کو اس نقطہ پر قطع کریگا۔

(165)

آٹھواں باب

اصولوں کے متشاکل تفاعل

۷۔ نیوٹن کا مسئلہ۔ اصولوں کی قوتوں کے مجموعے۔

اب ہم مساوات کی اصولوں کے متشاکل تفاعلوں کی بحث کی طرف رجوع کرتے ہیں۔ ان کا کچھ ذکر پہلے (صفحہ ۲۷) میں آچکا ہے۔ یہاں ہم ان تفاعلوں سے متعلق چند عام مسائل ثابت کریں گے۔

مسئلہ ۱۔ کسی مساوات کی اصولوں کی متشابہ قوتوں کے مجموعے سروں کے رقوم میں منطق طور پر بیان ہو سکتے ہیں۔
فرض کرو کہ مساوات ہے

$$f(\lambda) = \lambda^0 + \lambda^1 + \lambda^2 + \dots + \lambda^n$$

$\equiv (\lambda - \epsilon_1)(\lambda - \epsilon_2) \dots (\lambda - \epsilon_n)$
اب ہم سروں $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ کی رقوم میں $f(\lambda)$ کو
 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ کو یعنی عام ترقیم کے مطابق s_1, s_2, \dots, s_n کو
محسوب کریں گے۔

$$f(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\lambda - \epsilon_1} + \frac{f(\lambda)}{\lambda - \epsilon_2} + \dots + \frac{f(\lambda)}{\lambda - \epsilon_n}$$

اس مثال میں لا کو یکے بعد دیگرے ع_۱، ع_۲، ع_۳،، ع_ن میں
بدل کر جمع کیا جائے تو

$$س + ب + ب + ب + + ب + ب + ب =$$

اب م کو یکے بعد دیگرے ن، ن + ۱، ن + ۲، قیمتیں دینے سے
اور س = ن کو پیش نظر رکھنے سے ہمیں اس آخری مساوات سے ذیل کے رابطے ملتے ہیں

$$س + ب + ب + ب + + ب + ب + ب = ۰$$

$$س + ب + ب + ب + + ب + ب + ب = ۰$$

$$س + ب + ب + ب + + ب + ب + ب = ۰$$

پس اصولوں کی تمام مثبت قوتوں کے مجموعوں کو سروں کے منطق تفاعلوں
سے بیان کیا جاسکتا ہے۔ نیز دی ہوئی مساوات کو ایک ایسی مساوات میں
تحویل کرنے سے جس کی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصولوں ع_۱، ع_۲، ع_۳،،
ع_ن کے متکافی ہوں اور اوپر کے ضابطوں کو استعمال کرنے سے اصولوں کی
تمام معنی قوتوں کو بھی اسی طرح بیان کیا جاسکتا ہے۔

۸۔ مسئلہ ۲۔ کسی جبری مساوات کی اصولوں کے ہر منطق

متشاکل تفاعل کو سروں کی رقوم میں منطق طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔

اس مسئلہ کو صرف صحیح تفاعلوں کے لئے ثابت کرنا کافی ہے کیونکہ
کسی متشاکل تفاعل کو ایک واحد کسر میں تحویل کیا جاسکتا ہے جس کا شمار کنندہ

اور نسب نامہ دونوں صحیح متشاکل تفاعل ہوں۔ ع_۱، ع_۲، ع_۳،، ع_ن کا

ہر صحیح تفاعل، شکل ن ع_۱ ع_۲ ع_۳ کی رقوم کا مجموعہ ہوتا ہے

جہاں n ایک عددی مستقل ہے، اور اگر یہ تفاعل متشاکل ہو تو ہم اس کو شکل

$$n \text{ ف ق عم} \dots \dots \dots \text{ یعنی } n \text{ عم عم عم} \dots \dots \dots \text{ میں لکھ سکتے}$$

ہیں کیونکہ تمام قسمیں ایک ہی نمونہ کی ہوں گی۔ اس لئے اگر ہم یہ ثابت کر دیں کہ اس مقدار کو سرور کی رقوم میں نطق طور پر بیان کیا جاسکتا ہے تو مسئلہ ثابت ہو جاتا ہے۔ پہلے ہم متشاکل تفاعل $n \text{ ف ق عم} \text{ عم}$ کی حسب ذیل قیمت ثابت کرینگے۔

$$n \text{ ف ق عم} = \text{سن سن} - \text{سن ق} + \text{سن ق} \dots \dots \dots (1)$$

(168)

اسکو ثابت کرینگے لئے ہم سن سن اور سن ق کو باہم ضرب دیتے ہیں جہاں

$$\text{سن} = \text{سن} + \text{سن} + \text{سن} + \dots \dots \dots + \text{سن} + \text{سن}$$

$$\text{سن ق} = \text{سن ق} + \text{سن ق} + \text{سن ق} + \dots \dots \dots + \text{سن ق} + \text{سن ق}$$

جس سے

$$\text{سن سن ق} = \text{سن ق} + \text{سن ق} + \text{سن ق} + \dots \dots \dots + \text{سن ق} + \text{سن ق} + \text{سن ق} + \text{سن ق}$$

$$\text{یا سن سن ق} = \text{سن ق} + n \text{ ف ق عم}$$

جو دہرے تفاعل $n \text{ ف ق عم}$ کو واحد تفاعلوں سن سن ق، سن ق، سن ق کی رقوم میں مندرجہ بالا شکل میں بیان کرتا ہے۔ اب ہم تہرے تفاعل کے لئے اسی طرح کا جملہ ثابت کرتے ہیں یعنی

$$n \text{ ف ق عم} = \text{سن سن سن} - \text{سن سن ق} - \text{سن سن ق} - \text{سن ق سن} + \text{سن ق سن} + \text{سن ق سن} + \text{سن ق سن} \dots \dots \dots (2)$$

۳ $\text{ف عم} + \text{ق} = \text{سر}$ اور سر کو باہم ضرب دینے سے جہاں

۳ $\text{ف عم} + \text{ق} = \text{ف عم} + \text{ق} + \text{ف عم} + \text{ق} + \text{ف عم} + \text{ق} + \dots$

$\text{سر} = \text{ف عم} + \text{ق} + \text{ف عم} + \text{ق} + \dots + \text{ف عم} + \text{ق}$

ہیں تین مختلف حصوں پر مشتمل ایک جملہ ملتا ہے یعنی شکل ۳ $\text{ف عم} + \text{ق}$ کی تین
۳ $\text{ف عم} + \text{ق} + \text{ف عم} + \text{ق}$ اور ۳ $\text{ف عم} + \text{ق}$ کی تین۔

پس
۳ $\text{ف عم} + \text{ق} = \text{ف عم} + \text{ق} + \text{ف عم} + \text{ق} + \text{ف عم} + \text{ق} + \dots$

جو ایسا ضابطہ ہے جو دو ہرے اور تہرے متشاکل تفاعلوں کو ملاتا ہے۔
لیکن (۱) کی رو سے

۳ $\text{ف عم} + \text{ق} = \text{سک} + \text{ر سک} - \text{سک} + \text{ق} + \text{ر}$

۳ $\text{ف عم} + \text{ق} = \text{سک} + \text{ر سک} - \text{سک} + \text{ق} + \text{ر}$

۳ $\text{ف عم} + \text{ق} = \text{سک} + \text{ر سک} - \text{سک} + \text{ق}$

ان قیمتوں کو درج کرنے سے تہرے تفاعل ۳ $\text{ف عم} + \text{ق}$ مسلسلہ س س س س س س س س کے
کے واحد تفاعلوں کی رقوم میں مندرجہ بالا طریقہ پر بیان ہو سکتا ہے۔

اسی طرح جوہرے تفاعل ۳ $\text{ف عم} + \text{ق}$ کو تہرے تفاعل ۳ $\text{ف عم} + \text{ق}$

(169)

پر منحصر کیا جاسکتا ہے اور بالآخر س، س، س، وغیرہ پر اور علیٰ ہذا القیاس۔
یعنی آخر لام اصولوں کا ہر منطبق متشاکل تفاعل سروں کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے
کیونکہ مسئلہ اسے س، س، س، س، وغیرہ سروں کی رقوم میں بیان ہو سکتے ہیں
جب قوتِ ثنائوں میں سے چند قوت نامساوی ہو جائیں تو ضابطوں
(۱) اور (۲) میں ترمیم کرنی ہوگی۔

مثلاً اگر $f = c$ تو $c = f$ $c = f$ اور (۱) کی رقیں دودو

کر کے مساوی ہوتی ہیں اس لئے $c = f$ $c = f$ $c = f$ جس سے

$$c = f = \frac{1}{2} (s_1 - s_2) \quad (1)$$

اسی طرح اگر $c = f$ $c = f$ میں $f = c$ = رتودہ چھ رقیں مساوی

ہوتی ہیں جو $c = f$ $c = f$ میں اصولوں کے تبادلہ سے حاصل ہوتی ہیں پس

$$c = f = \frac{1}{2} (s_1 - s_2 - s_3 + s_4 + s_5 + s_6) \quad (2)$$

عام صورت میں اگر ت قوت نامساوی ہو جائیں تو ہر رقم $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times x$ مرتبہ تکرار پاتی ہے۔

مثالیں

۱۔ ثابت کرو

$$c = f = \frac{1}{2} (s_1 - s_2 - s_3 + s_4 + s_5 + s_6) \quad (3)$$

$$2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 + 31 + 32 + 33 + 34 + 35 + 36 + 37 + 38 + 39 + 40 + 41 + 42 + 43 + 44 + 45 + 46 + 47 + 48 + 49 + 50 + 51 + 52 + 53 + 54 + 55 + 56 + 57 + 58 + 59 + 60 + 61 + 62 + 63 + 64 + 65 + 66 + 67 + 68 + 69 + 70 + 71 + 72 + 73 + 74 + 75 + 76 + 77 + 78 + 79 + 80 + 81 + 82 + 83 + 84 + 85 + 86 + 87 + 88 + 89 + 90 + 91 + 92 + 93 + 94 + 95 + 96 + 97 + 98 + 99 + 100$$

(172)

تقسیم کی تکمیل کرنے سے اور اس مساوات کی طرفین میں صرف باقیوں کو برقرار رکھنے سے

$$\frac{ک^۱-۱ + ک^۱-۲ + + ک^۱-ن}{ف (لا)} = \frac{ف (ع۱) + + ف (ع۴)}{لا - ع۴} + + \frac{ف (ع۱)}{لا - ع۱}$$

جس سے

$$ک^۱-۱ + ک^۱-۲ + + ک^۱-ن = ف (ع۱) + + ف (ع۴) + + ف (ع۱) (لا - ع۱)$$

اور اس مساوات کی طرفین میں $ک^۱-۱$ کے سروں کا مقابلہ کرنے سے

$$ک = ف (ع۱)$$

۲۔ ثابت کرو کہ سی، اس خارج قسمت میں $\frac{۱}{لا}$ کا سر ہے جو ف (لا) کو

ف (لا) سے تقسیم کرنے سے اور لا کی منفی قوتوں کی بموجب ترتیب دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

۳۔ ثابت کرو کہ سی، اسی خارج قسمت میں $لا$ کا سر (بہ تبدیل علامت)

ہے جب اسکو لا کی مثبت قوتوں کی بموجب ترتیب دیا جاتا ہے۔

۴۔ اگر ف (لا) کا درجہ ن - ۲ سے تجاوز نہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{ف (لا)} = \frac{ف (ع۱)}{لا - ع۱} + \frac{ف (ع۲)}{لا - ع۲} + \frac{ف (ع۳)}{لا - ع۳} + \frac{ف (ع۴)}{لا - ع۴} + \frac{ف (ع۱)}{لا - ع۱}$$

جہاں $\frac{۱}{ف (لا)}$ سے وہ مجموعہ تعبیر ہوتا ہے جو ر کو ۱ سے ن تک (بشمول ہر واحد)

تکام قیمتیں دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{ف (لا)}{ف (لا)} = \frac{۱}{لا - ع۱} + \frac{۱}{لا - ع۲} + \frac{۱}{لا - ع۳} + \frac{۱}{لا - ع۴} + \frac{۱}{لا - ع۱}$$

وزن کینکے (دیکھو دفعہ ۲۸) اور وہ بڑی سے بڑی قوت جسمیں ہر اہل تعامل کے اندر داخل ہوتی ہے تعامل کا رتبہ کھلائیگی۔ مثلاً ج عہ بہ ج کا وزن چھ اور اسکا رتبہ تین ہے۔ یہ ثابت کر دیا گیا ہے (دفعہ ۲۸) کہ اصلو کسی متشاکل تعامل کی قیمت میں (جو سروں کی رقوم میں بیان کی گئی ہو) ہر رقم کے لاقول کا مجموعہ تعامل کے وزن کے مساوی ہوتا ہے۔ اب ہم متشاکل تعاملوں سے متعلق دوسرا مسئلہ ثابت کرتے ہیں یعنی:-

کسی متشاکل تفاعل کی قیمت سروں ب، ب، ب، ب کی رقوم میں معلوم کیجئے تو اس جملہ کا درجہ متشاکل تفاعل کے رتبہ کے مساوی ہوتا ہے اس کو دفعہ ۲۳ کی مساواتوں میں آسانی کے ساتھ اخذ کیا جاسکتا ہے کیونکہ اصلوں کی رقوم میں ہر ایک سر کی قیمت میں کوئی اصل صرف پہلی قوت میں شامل ہوتی ہے اور اس لئے سروں میں بڑے سے بڑا درجہ وہی ہوگا جو کسی ایک اصل کے متناظر متشاکل تفاعل کا ہے۔ مثلاً ۳ عہدہ کی قیمت $2 - 2 - 2$ ب، ب، ب ہے۔ سروں کے اس تفاعل کا

درجہ دو ہے اور یہ وہی ہے جو متشاکل تفاعل کا رتبہ ہے۔

چونکہ مندرجہ بالا مسئلہ اہم ہے اس لئے ہم اسکا ایک دوسرا ثبوت بھی دیتے ہیں جس میں Δ کی کسی مناسب قوت سے متشکل تفاعل کو ضرب دینے سے اسکو سروں Δ ، Δ ، Δ ، Δ ، Δ ، Δ کے ایک متجانس صحیح تفاعل کے طور پر بیان کیا جاسکتا ہے چنانچہ تفاعل آئینوالے اطلاقات میں عموماً اسی شکل میں نظر آتا۔

سروں

بہ، بہ، بہ، بہ،، بہ

کی جگہ $\frac{1}{1}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{n}$ رکھو۔

اب اگر فہ (عم، عم،، عن) سے اصولوں کا کوئی منطق صحیح متشاکل تفاعل تعبیر ہو تو

$$\text{فہ (عم، عم،، عن)} = \text{ف (ب، ب،، ب)}$$

جہاں تفاعل ف (ب، ب،، ب) کا درجہ سروں میں ۵ ہے اور یہ تفاعل سروں کا ایک متجاش صحیح تفاعل ہے جو ب سے تقسیم نہیں ہوتا۔ ہمیں ثابت یہ کرنا ہے کہ فہ کا درجہ ۵ ہے۔ اس مقصد کے لئے

اصولوں کو ان کے متکافوں میں بدل دو اور اسلئے ب، ب،، ب کو ب، ب،، ب میں

ب میں -
پس

$$\text{فہ (عم، عم،، عن)} = \text{ف (ب، ب،، ب)}$$

$$\text{فہ (عم، عم،، عن)} = \frac{\text{سا (عم، عم،، عن)}}{\text{عم، عم،، عن}}$$

جہاں فہ کا درجہ پ ہے اور سا ایک صحیح تفاعل ہے جو تمام اصولوں کے حاصل ضرب سے تقسیم نہیں ہوتا اور (عم، عم،، عن) تمام رقموں کے نسب تاؤں کا کم سے کم مشترک جزو ضربی ہے۔ (۱) میں درج کرنے سے

$$\text{ب سا (عم، عم،، عن)} = \text{ف (ب، ب،، ب)}$$

اس مسادات سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ پ، ہ کے مساوی ہے کیونکہ

اگر پ، ہ سے بڑا ہوتا تو سا (عم، عم،، عن) حاصل ضرب عم، عم،، عن سے

۳ $\text{عم} \text{عم} \text{عم} \dots$ میں رقوموں کی تعداد ہوگی

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n}$$

جہاں m سے ہر رقم میں اصولوں کی تعداد اور n سے مساوی قوت ناؤنجی تعداد تعبیر ہوتی ہے۔

جب اصولوں کے متشاکل تفاعل میں داخل ہونے والی بڑی سے بڑی قوت ایک چھوٹا عدد ہو یعنی جب تفاعل کا رتبہ چھوٹا ہو (دیکھو دفعہ ۸۱) تو متشاکل تفاعل کو محسوب کرنے کے لئے دفعہ ۲۷ میں بیان کردہ طریقے استعمال کرنا مفید ہوگا۔

یہ مشاہدہ کرنا ضروری ہے کہ جب کسی متشاکل تفاعل کو جس کا درجہ تمام اصولوں میں (یعنی اسکا وزن) n ہو n دیں درجہ کی مساوات کے لئے سروں $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ کی رقوم میں محسوب کیا جاتا ہے تو اسکی قیمت کسی اعلیٰ تر درجہ کی مساوات کے لئے (جب عددی سر سب کے سب ایک کے مساوی ہوں) وہی ہوتی ہے کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ b_n کے بعد کا کوئی سر اس قیمت میں داخل نہیں ہو سکتا اور دفعہ ۷۷ کی مساواتیں جسکے ذریعہ ہم فرض کرتے ہیں کہ قیمت محسوب کی گئی ہے وہی شکل رکھتی ہیں خواہ مساوات n دیں درجہ کی ہو یا اس سے بڑے درجہ کی۔ یہ بھی واضح ہے کہ اس متشاکل تفاعل کی قیمت، m درجہ کی مساوات کیلئے (جبکہ $m > n$) حاصل ہو سکتی ہے اگر n دیں درجہ کی مساوات کے لئے اس متشاکل تفاعل کی جو قیمت حاصل ہوئی ہے انہیں b_{m+1}, b_{m+2}, \dots

(176)

.... b_n سب کو صفر کے مساوی رکھا جائے کیونکہ کمتر درجہ کی مساوات کو n دیں درجہ کی مساوات سے اس طرح اخذ کیا جاسکتا ہے کہ b_m کے بعد آئیوں اے تمام سروں کو صفر کے مساوی رکھ دیا جائے۔ اور اسی طرح

متناظر متشاکل تفاعل اصولوں $عم + عم + ... + عم$ میں سے ہر ایک کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مثالیں

۱۔ مساوات

$$لا + ب لا - ۱ + ب لا - ۲ + ... + ب لا - ۱ + لا + ب = ۰$$

کی اصولوں کے متشاکل تفاعل $عم + عم + ... + عم$ کو منسوب کرو۔
مساواتوں

$$\begin{aligned} ۳ عم + عم &= ب \\ ۳ عم + عم &= ب \end{aligned}$$

کو باہم ضرب دو۔

حاصل ضرب میں رقم $عم + عم + ... + عم$ صرف ایک مرتبہ واقع ہوتی ہے اور رقم $عم + عم + ... + عم$ چار مرتبہ کیونکہ $عم + عم + ... + عم$ سے $عم + عم + ... + عم$ سے ضرب دینا ہوگا۔

$$پس \quad ۳ عم + عم + عم + عم = ب$$

اس لئے $۳ عم + عم + عم + عم = ب$ (مثال ۶ دفعہ ۲ کے ساتھ مقابلہ کرو)

اگر دفعہ ۸ کے طریقہ سے حساب لگایا جاتا تو

$$۳ عم + عم + عم = \frac{۱}{۲} س - س - س - \frac{۱}{۲} س + س$$

اور اس میں دفعہ ۸ کی قیمتیں درج کرنے سے وہی اوپر کا نتیجہ حاصل ہوتا۔

لیکن اس صورت میں ظاہر ہے کہ پہلا طریقہ بہت زیادہ آسان ہے کیونکہ اس میں
وغیرہ کی قیمتوں سے بہت سی ایسی رقمیں داخل ہوتی ہیں جو ایک دوسرے کو
زائل کرتی ہیں۔

۲۔ علمِ عام کو عام مساوات کے لئے محبوب کرو۔

یہاں 3 عم، عدم کا مربع لینے سے

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

مربع لینے میں یہ ظاہر ہے کہ رقم $عم، عم، عم، عم، عم$ کو $عم$ سے ضرب دینے سے پیدا ہوگی۔
پس نتیجہ میں $عم، عم، عم، عم، عم$ کا سرچھ ہو گا کیونکہ مربع میں ہر حاصل ضرب دو مرتبہ
واقع ہوتا ہے۔ اس مثال اور مثال ۸ دفعہ ۲ میں صرف یہ فرق ہے کہ رقم
 $عم، عم، عم$ کے قبل ۳ ہے۔ اس لئے بالآخر

$$3 \text{ عم}^2 \text{ عم}^2 = \frac{2}{3} - 2 \text{ ب} \text{ ب} \text{ ب} + 2 \text{ ب} \text{ ب}$$

۳۔ علمِ عمر کو عام مساوات کے لئے محبوب کرو۔

مثال ۹ دفعہ ۲ کی طرح یہاں

$$z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2 = z_1 z_2 z_1^2 z_2^2$$

اس لئے گزشتہ مئیوں کو استعمال کرنے سے

$$\sum \text{عم}^{\text{ع}} = \text{ب}^{\text{ب}} - \text{ب}^{\text{ب}} - \text{ب}^{\text{ب}} + \text{ب}^{\text{ب}}$$

۴۔ عہدِ عہد کو عام مساوات کے لئے محبوب کرو۔

نتیجہ دہی ہو گا جو پانچویں درجہ کی مساوات کے لئے حساب لگانے میں ہوتا۔

اس متشاکل تفاعل کو حاصل کرنے کے لئے ہم ۳ عم ۲ عم ۱ اور ۳ عم ۲ عم ۱ کو باہم ضرب دیتے ہیں اور یہ دیکھتے ہیں کہ کس نمونہ کی رقمیں پیدا ہوتی ہیں جنہیں پانچ اصول سے عم ۱ عم ۲ عم ۳ عم ۴ عم ۵ شامل ہوں۔ رقم ۱ عم ۲ عم ۳ عم ۴ عم ۵ صرف ایک مرتبہ واقع ہوگی کیونکہ یہ پیدا ہو سکتی ہے صرف عم ۲ عم ۱ کو عم ۳ عم ۲ عم ۱ سے ضرب دینے سے۔ نمونہ ۱ عم ۲ عم ۳ عم ۴ عم ۵ کی رقمیں، انہیں سے ہر ایک، تین مرتبہ واقع ہوگی کیونکہ رقم ۱ عم ۲ عم ۳ عم ۴ عم ۵ پیدا ہوگی عم ۳ عم ۲ عم ۱ کو عم ۳ عم ۲ عم ۱ سے یا عم ۱ عم ۲ عم ۳ عم ۴ عم ۵ کو عم ۲ عم ۱ سے ضرب دینے سے اور کسی اور طرح پیدا نہیں ہو سکتی۔ رقم ۱ عم ۲ عم ۳ عم ۴ عم ۵ دس مرتبہ واقع ہوگی کیونکہ یہ اصول سے کسی زوج کو دوسری تین اصولوں سے ضرب دینے سے پیدا ہوگی اور پانچ اصولوں میں سے دو دو کے اجتماعوں کی تعداد دس ہے۔ اس لئے عام مساوات کے لئے

$$۳ عم ۲ عم ۱ عم ۳ عم ۲ عم ۱ = ۳ عم ۲ عم ۱ عم ۳ عم ۲ عم ۱ + ۳ عم ۲ عم ۱ عم ۳ عم ۲ عم ۱ عم ۳ عم ۲ عم ۱$$

$$۳ عم ۲ عم ۱ عم ۳ عم ۲ عم ۱ عم ۳ عم ۲ عم ۱$$

[ن = ۵ کے لئے ہم اس مساوات کی تصدیق بالکل ایسے ہی کر سکتے ہیں

جیسے مثال ۹ دفعہ ۲۰ میں۔ کیونکہ دو اجزائے ضربی کے حاصل ضرب میں جبکہ ہر جزو ضربی میں دس رقمیں ہوں ۱۰۰ رقمیں ہونگی یعنی ۱ عم ۲ عم ۳ عم ۴ عم ۵ کے نمونہ کی ۳۰ رقمیں عم ۱ عم ۲ عم ۳ عم ۴ عم ۵ کے نمونہ کی ۲۰ رقمیں لیکن انہیں سے ہر ایک تین مرتبہ اور

رقم ۱ عم ۲ عم ۳ عم ۴ عم ۵ ۱۰ مرتبہ۔]

اس طرح مطلوبہ متشاکل تفاعل کو محسوب کر نہیں ۳ عم ۲ عم ۱ عم ۳ عم ۲ عم ۱ کو

(۱-عم_۱ ما) (۱-عم_۱ ما) ... (۱-عم_۱ ما) = ۱ + ب_۱ ما + ب_۲ ما + ... + ب_ن ما
اسلئے مثال ماسبق سے

$$(۱ + ب_۱ ما + ب_۲ ما + ... + ب_ن ما) (۱ + ب_۱ ما + ب_۲ ما + ... + ب_ن ما) = ۱$$

جس سے

$$ب_۱ + ب_۲ + ... + ب_ن = ۰، ب_۱ + ب_۲ + ... + ب_ن = ۰، ب_۱ + ب_۲ + ... + ب_ن = ۰$$

.....
ان مساداتوں سے (جنہیں ب_۱، ب_۲، وغیرہ اور ب_۱، ب_۲، وغیرہ کا
اسپیس تبادلہ ہو سکتا ہے) ب_۱، ب_۲، ب_۳، ... ب_ن کو ب_۱، ب_۲، ب_۳، ... ب_ن کی رقوم
میں بیان کیا جاسکتا ہے اور بالکس -
اس مثال اور مثال ماسبق کے ذریعہ حسب ذیل متشاکل تفاعلوں کی
قیمتیں سروں کی رقوم میں معلوم کی جاسکتی ہیں:-

$$\frac{۱-عم}{ف(عم)} \supseteq \frac{عم}{ف(عم)} \supseteq \frac{۱+عم}{ف(عم)}، \text{ وغیرہ}$$

۳- ب_۱ کو اصولوں کی قوتوں کے مجموعوں کے ذریعہ بیان کرو -

ماصل ضرب (۱-عم_۱ ما) (۱-عم_۱ ما) ... (۱-عم_۱ ما) کو $\frac{۱}{ع}$ سے تعبیر کرنے سے

اور تفرق کرنے سے

$$\frac{۱}{ع} = \frac{فرع}{فرما} = \frac{عم}{۱-عمما} = س + س + س + ... + س + س + ...$$

$$۱ = ع + ب_۱ ما + ب_۲ ما + ... + ب_ن ما + ...$$

نیز
اس لئے

$$(۱ + ب_۱ ما + ب_۲ ما + ... + ب_ن ما) (س + س + س + ... + س + س + ...) = (۱ + ب_۱ ما + ب_۲ ما + ... + ب_ن ما) (س + س + س + ... + س + س + ...)$$

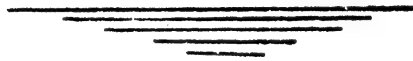
اب مابقی مختلف قوتوں کے سروں کا مقابلہ کرنے سے ہمیں مساواتوں کی ایک تعداد ملتی ہے جن کے ذریعہ متجانس حاصل ضربوں کے مجموعوں $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots$ کو $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots$ وغیرہ کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے۔

۴۔ متجانس حاصل ضربوں کے مجموعوں کو سروں کی رقوم میں محسوب کرنے کے لئے ذیل کا ضابطہ ثابت کرو:-

$$\text{فرس بر} = \frac{\text{فرس} + \text{ع}}{\text{ع}} = (1 + \text{ع}) \pi_1$$

دفعہ ۸۔ کی مساوات (۱) کی طرفین کو تفریق کرو اور مثال ۲ کی مساوات سے

π_1, π_2, π_3 وغیرہ کو داخل کرو۔



نوال باب

مساواتوں کی اصولوں کی انتہائیں

(180)

۸۴۔ انتہاؤں کی تعریف۔ عددی مساواتوں کی حقیقی اصولوں کو

دریافت کرنے کی کوشش میں سب سے پہلے اُن حدود کی قریب ترین قیمتیں معلوم کرنا مفید ہے جنکے اندر یہ اصلیں واقع ہوتی ہیں۔ ہم یہاں وہ تحقیقات شروع کرتے ہیں جن کا حوالہ دفعہ ۴ کے آخر میں دیا گیا تھا اور چند مسئلے ثابت کرتے ہیں جنکا تعلق مساواتوں کی حقیقی اصولوں کی انتہاؤں سے ہے۔

مثبت اصولوں کی علوی انتہا وہ مثبت عدد ہے جو ان اصولوں سے سب سے بڑی اصل سے بڑا ہو اور سفلی انتہا وہ مثبت عدد ہے جو انہیں سے سب سے چھوٹی اصل سے چھوٹا ہو منفی اصولوں کی علوی انتہا وہ منفی عدد ہے جو انہیں سے سب سے بڑی اصل سے بڑا ہو اور انکی سفلی انتہا وہ منفی عدد ہے جو انہیں سے سب سے چھوٹی اصل سے چھوٹا ہو، یہاں سب سے بڑے منفی عدد سے مراد وہ عدد ہے جو۔ ∞ سے قریب ترین ہے۔

جب ہم وہ انتہائیں معلوم کر لیتے ہیں جنکے اندر مساوات کی تمام حقیقی اصلیں واقع ہوتی ہیں تو مساوات کو حل کریمیں دوسرا کام یہ ہوگا کہ وہ وقفے دریافت کئے جائیں جنہیں مختلف اصلیں واقع ہوتی ہیں۔ اس موضوع کا مقصد کے لئے جو خاص طریقے رائج ہیں اُن کا ذکر آئندہ باب میں

کیا جائیگا۔

ذیل کے تمام مسئلے مثبت اصلوں کی علوی انتہاؤں سے متعلق ہیں اور آگے چلکر یہ ثابت کیا جائیگا کہ منفی انتہاؤں اور منفی اصلوں کی تعین آسانی کے ساتھ ان مسئلوں سے ہو سکتی ہے۔

۸۵۔ مسئلہ ۱۔ کسی مساوات

$$a^0 + b^1 + c^2 + \dots + p^{n-1} + q^n = 0$$

میں اگر پہلی منفی رقم۔ b^1 ہو اور اگر بڑے سے بڑا منفی سر۔ q^n ہو تو مثبت اصلوں کی ایک علوی انتہا p ہوگی۔

(181)

لا کی کوئی قیمت جو

$a^0 + b^1 + c^2 + \dots + p^{n-1} + q^n < 0$ بسر $\frac{a^0 + b^1 + c^2 + \dots + p^{n-1} + q^n}{1 - a}$ بنا دے بدرجہ اولیٰ $f(a)$ کو مثبت بنائیگی۔
اب لا کو ایک سے بڑا لینے سے یہ نامساوات ذیل کے رشتے سے پوری ہوتی ہے:-

$$a^0 + b^1 + c^2 + \dots + p^{n-1} + q^n < 0$$

$$a^0 + b^1 + c^2 + \dots + p^{n-1} + q^n < 0$$

$$a^0 + b^1 + c^2 + \dots + p^{n-1} + q^n < 0$$

اور پھر یہ نامساوات ذیل کے رشتے سے پوری ہوتی ہے:-

$$(1-a) = (1-a) \text{ یا } < \text{ بس}$$

کیونکہ صریحاً
اس لئے بالآخر

$$(1-a) = \text{یا } < \text{ بس}$$

یعنی $1-a < 1$ یا $1-a > 1$

۸۶۔ مسئلہ ۲۔ اگر کسی مساوات میں ہر منفی سر کو مثبت لیا جائے اور اس کو اس کے قبل کے تمام مثبت سرؤں کے مجموعہ سے تقسیم کیا جائے تو وہ بڑے سے بڑا خارج قسمت جو اس طرح حاصل ہوا انہیں ایک جمع کرنے کے بعد مثبت اصولوں کی ایک علوی انتہا ہوگا۔

فرض کرو کہ مساوات ہے

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1} = 0$$

جس میں ہم وضاحت کی خاطر جو تھے سر کو منفی سمجھتے ہیں اور عام صورت میں ایک منفی سر۔ اور پر بھی غور کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ اس مساوات کی ہر مثبت رقم کو ضابطہ

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1} = 0$$

کے ذریعہ تحویل کیا گیا ہے جہاں یہ ضابطہ

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1} = \frac{1-a^n}{1-a}$$

س

$$1 + \frac{1}{1+1+\dots+1} < 1 + \frac{1}{1+1+\dots+1} < 1$$

اور ہر قدم کو مثبت بنانے کے لئے جس بڑی سے بڑی دو قیمت لینی چاہئے جو اس طور پر حاصل ہو۔ اس لئے لا کی ایسی قیمت مثبت اصولوں کی ایک علوی انتہا ہے۔

۸۷۔ عملی اطلاعات۔ اصولوں کی قریبی انتہائیں عملی طور پر معلوم

کرنے میں پچھلے دو دفعات کے مسئلوں سے سب سے زیادہ سہولت بخش عام طریقے ملتے ہیں۔ بعض اوقات ایک مسئلہ سے قریب تر انتہائی ملکی اور بعض اوقات دو سب سے۔ اس لئے دونوں مسئلوں کو استعمال کر کے قریب تر انتہا معلوم کرنا بہتر ہوگا۔ مسئلہ اعمواً زیادہ کارآمد اس وقت ہوگا جبکہ پہلے منفی سر کے قبل متعدد مثبت سر ہوں تاکہ رکافی بڑا ہو۔ اور مسئلہ ۲ اس وقت جبکہ پہلے بڑے منفی سر کے قبل بڑے مثبت سر واقع ہوں۔ عام طور پر مسئلہ ۲ کو استعمال کرنے سے زیادہ تر قریبی انتہا معلوم ہوگی۔ ہم یہاں انتہا سے مراد وہ صحیح عدد لے رہے ہیں جو ان مسئلوں سے حاصل کردہ یقینیت کے عین بعد واقع ہوتا ہے۔

مثالیں

۱۔ مساوات

$$= 23 + 18 - 17 + 15 - 1$$

کی مثبت اصولوں کی ایک علمی انتہا معلوم کرو۔

مسئلہ ۱ سے انتہائی ملکی ۱ + ۱ یعنی ۹

مسئلہ ۲۔ سے انتہائی کی $\frac{1}{2} + 1$ یعنی ۱

پس ایک علوی انتہا ۲ ہے۔

۲۔ مسادات

$$لا^۰ + لا^۱ + لا^۲ + لا^۳ - لا^۴ - لا^۵ - لا^۶ - لا^۷ - لا^۸ - لا^۹ - لا^{۱۰} - لا^{۱۱} - لا^{۱۲} = ۰$$

کی مثبت اصولوں کی ایک علوی انتہا معلوم کرو۔

مسئلہ ۱ سے حاصل ہوگا $لا^۱ + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ + لا^۶ + لا^۷ + لا^۸ + لا^۹ + لا^{۱۰} + لا^{۱۱} + لا^{۱۲}$ اور اسلئے ایک انتہا ۵ ہے۔

مسئلہ ۲ سے حاصل ہوگا $لا^۱ + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ + لا^۶ + لا^۷ + لا^۸ + لا^۹ + لا^{۱۰} + لا^{۱۱} + لا^{۱۲}$ اور اس لئے ایک انتہا ۱۲ ہے۔

اس صورت میں مسئلہ ۱ سے قریب تر انتہا ملتی ہے۔

$$۳۔ لا^۰ + لا^۱ + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ + لا^۶ + لا^۷ + لا^۸ + لا^۹ + لا^{۱۰} + لا^{۱۱} + لا^{۱۲} - لا^{۱۳} - لا^{۱۴} - لا^{۱۵} - لا^{۱۶} - لا^{۱۷} - لا^{۱۸} - لا^{۱۹} - لا^{۲۰} = ۰$$

کی مثبت اصولوں کی ایک علوی انتہا معلوم کرو۔

کسروں

$$\frac{۸}{۶+۵+۴+۱} \quad \frac{۱۱}{۵+۴+۱} \quad \frac{۹}{۵+۴+۱} \quad \frac{۳}{۴+۱}$$

میں سے تیسری کسر سب سے بڑی ہے اور مسئلہ ۲ سے انتہا ہوگی ۳۔ مسئلہ ۱ سے انتہا ملے گی ۵۔

$$۴۔ لا^۰ + لا^۱ + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ + لا^۶ + لا^۷ + لا^۸ + لا^۹ + لا^{۱۰} + لا^{۱۱} + لا^{۱۲} + لا^{۱۳} + لا^{۱۴} + لا^{۱۵} + لا^{۱۶} + لا^{۱۷} + لا^{۱۸} + لا^{۱۹} + لا^{۲۰} = ۰$$

کی مثبت اصولوں کی علوی انتہا معلوم کرو۔

جواب :- دونوں طریقوں سے انتہا ملے گی ۶۔

$$۵۔ لا^۰ + لا^۱ + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ + لا^۶ + لا^۷ + لا^۸ + لا^۹ + لا^{۱۰} + لا^{۱۱} + لا^{۱۲} + لا^{۱۳} + لا^{۱۴} + لا^{۱۵} + لا^{۱۶} + لا^{۱۷} + لا^{۱۸} + لا^{۱۹} + لا^{۲۰} = ۰$$

کی مثبت اصولوں کی انتہا معلوم کرو۔

جواب :- مسئلہ ۱ سے ۲۰، مسئلہ ۲ سے ۳۔

عموماً صرف معائنہ سے ایسی انتہا کا معلوم کرنا ممکن ہے جو متذکرہ صدر مسئلوں سے حاصل شدہ انتہاؤں سے قریب تر ہو۔ یہ طریقہ اس بات پر مشتمل

ہوتا ہے کہ ہم مجوزہ مساوات کی رقموں کو گرد ہوں میں ترتیب دیں اس طور پر کہ ہر گردہ میں ایک مثبت رقم پہلے رکھی جائے اور پھر یہ دیکھیں کہ وہ کم سے کم صحیح عدد کونسا ہے جس کو لا کی بجائے رکھنے سے ہر گردہ مثبت ہو جاتا ہے۔ کسی خاص صورت میں خود مساوات کی شکل سے ظاہر ہوگا کہ ترتیب کی صورت کیا ہونی چاہیے۔

۶۔ مثال ۲ کی مساوات کو یوں ترتیب دیا جاسکتا ہے :-

$$لا(لا-۲) + (۸-۳) لا + لا + ۱۸ = ۰$$

لا = ۳ یا اس سے کوئی بڑے عدد سے ہر گردہ مثبت ہو جاتا ہے۔ پس ایک علوی انتہا ۳ ہے۔

۷۔ مثال ۴ کی مساوات کی ترتیب یہ ہو سکتی ہے :-

$$لا(لا-۱۱) + ۲۰ لا(لا-۶) + ۴ لا + ۱۳ لا - ۲۵ = ۰$$

لا = ۳ یا اس سے کسی بڑے عدد سے ہر گردہ مثبت ہو جاتا ہے۔ اسلئے ایک انتہا ۳ ہے۔

۸۔ مساوات

$$لا(لا-۲) + لا(لا-۳) + لا(لا-۲) + ۱۸ = ۰$$

کی اصولوں کی ایک علوی انتہا معلوم کرو۔
اس کو شکل

$$لا(لا-۲) + لا(لا-۵) + ۲۸ لا(لا-۱/۳) + ۱۸ = ۰$$

میں رکھا جاسکتا ہے۔ اب چونکہ سہ رقمی لا-۲ لا + ۸ کی اصلیں خیالی ہیں یہ لا کی تمام قیمتوں کے لئے مثبت ہے (دیکھو دفعہ ۱۲)۔ پس لا = ۱ علوی انتہا ہے۔
دو درجی کو اس طور پر کسی گردہ میں داخل کرنے سے اکثر صورتوں میں فائدہ ہوگا بشرطیکہ اسکی اصلیں خیالی یا مساوی ہوں۔

۹۔ مساوات

$$لا(لا-۵) + لا(لا-۱۰) + لا(لا-۲۳) + ۹۰ لا - ۳۱۷ = ۰$$

کی اصولوں کی ایک علوی انتہا معلوم کرو۔
اس قسم کی مثالوں میں سہولت آئیں ہوگی کہ بڑی سے بڑی قوت والی رقم کو منفی رقموں کے درمیان تقسیم کر دیا جائے۔ چنانچہ اوپر کی مساوات کو اس شکل میں رکھا جاسکتا ہے:-

$$\text{لا} - \text{لا} = ۷ + \text{لا} - \text{لا} + ۱۰ + \text{لا} - \text{لا} + ۲۳ + \text{لا} - \text{لا} + ۹۰ + \text{لا} - \text{لا} = ۳۱۷$$

ظاہر ہے کہ اصولوں کی ایک علوی انتہا ۷ ہے۔ یہاں عام طریقوں سے زیادہ دور کی انتہا ملتی ہے۔

۱۰۔ مساوات

$$\text{لا} - \text{لا} = ۲ - \text{لا} - ۲ - \text{لا} = ۲۷$$

کی اصولوں کی علوی انتہا معلوم کرو۔

جب منفی رقمیں متعدد ہوں اور بڑی سے بڑی قوت والی رقم کا سر ایک ہو تو سہولت آئیں ہے کہ پوری مساوات کو ایسے عدد سے ضرب دیا جائے کہ بڑی سے بڑی قوت والی رقم کو منفی رقموں کے درمیان تقسیم کیا جاسکے۔ یہاں ۴ سے ضرب دیکر مساوات کو شکل ذیل میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\text{لا} - \text{لا} = ۴ + \text{لا} - \text{لا} + ۸ + \text{لا} - \text{لا} + ۱۶ + \text{لا} - \text{لا} = ۹۶$$

علوی انتہا ۴ ہے۔ عام طریقوں سے ۲۵ حاصل ہوگی۔

۸۸۔ مسئلہ ۳۔ کوئی عدد جو کثیر الارقام ف (لا) اور اس کے

(185)

تمام مشتق تفاعلوں ف (لا) ف (لا) ف (لا) ف (لا) ف (لا) ف (لا) ف (لا) ف (لا) کو مثبت بنادے مساوات ف (لا) = کی مثبت اصولوں کی

ایک علوی انتہا ہوگا۔

انتہاؤں کو معلوم کرنیکا یہ طریقہ نیوٹن سے منسوب ہے۔ اسکو استعمال کرنے میں قبل الذکر طریقوں کی بہ نسبت بہت زیادہ محنت اٹھانی پڑے گی لیکن اس کا فائدہ یہ ہے کہ اس سے ہمیشہ بہت قریب کی انتہائیں

ملینگی اور ایسی مساوات کی صورت میں جبکی سب اصلیں حقیقی ہوں اس طریقہ سے حاصل کی ہوئی انتہا جیسا کہ آگے بلکہ ثابت کیا جائیگا بڑی سے بڑی اصل کے عین بعد کا صحیح عدد ہوگی۔

اس مسئلہ کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ مساوات ف (لا) =۔ کی اصلوں کو بقدر ۵ کے گھٹایا گیا ہے تو لا = ۵ = ما

$$ف (ما + ۵) = ف (۵) + ف (۵) + ف (۵) + \dots + ف (۵) + ف (۵) + \dots$$

$$ف (۵) + ف (۵) + \dots + ف (۵) + ف (۵) + \dots$$

اب اگر ۵ ایسا ہو کہ وہ تمام سروں ف (۵)، ف (۵)، ف (۵)، ...، ف (۵) کو مثبت بنادے تو ما کی مساوات کی کوئی اصل مثبت نہیں ہو سکتی جس کے یہ معنی ہیں کہ لا کی مساوات کی کوئی اصل ۵ سے بڑی نہیں ہو سکتی۔ پس مثبت اصلوں کی ایک علوی انتہا ۵ ہے۔

مثال

$$ف (لا) = لا^۳ - لا^۲ - لا - ۵$$

کسی مثال میں انتہاؤں کو معلوم کرنے کے لئے نیوٹن کا طریقہ استعمال کرنا ہو تو عام طریقہ عمل حسب ذیل ہو گا:۔ وہ چھوٹے سے چھوٹا صحیح عدد لو جو ہے ف (لا) کو مثبت بنادے اور ترتیب وار ف (لا) تک اوپر جاتے ہو دوسرے تقاعلوں میں لا کی بجائے اس عدد کو درج کر نیکاً اثر دریافت کرو۔ جب ایسے تعادل پر پہنچو جو زیر بحث عدد سے منفی ہو جائے تو اسکو بقدر ایک متواتر بڑھاتے جاؤ یہاں تک کہ اس کے درج کرنے سے تعادل مثبت ہو جائے

اور پھر اس نئے عدد کے ساتھ وہی عمل کرو جو اوپر مذکور ہوا اور اسکو بڑھاتے جاؤ
اگر سلسلہ کا کوئی دوسرا فعال منفی ہو جائے۔ علیٰ ہذا یہاں تک کہ ایسا عدد ملجائے
جو سلسلہ کے تمام تقاعلوں کو مثبت بنادے۔ مثال بالائیں تقاعلوں کا سلسلہ
یہ ہو گا:۔

$$ف (لا) = لا^۱ - لا^۲ - لا^۳ - لا^۱۵ - لا^۳$$

$$ف (لا) = لا^۴ - لا^۶ - لا^۲ - لا^۱۵$$

$$\frac{۱}{۲} ف (لا) = لا^۶ - لا^۲ - لا^۳$$

$$\frac{۱}{۴} ف (لا) = لا^۴ - لا^۲$$

$$\frac{۱}{۲۴} ف (لا) = لا^۱$$

یہاں لا = ۱ سے ف (لا) مثبت بن جاتا ہے۔ ف (لا) میں لا = ۱
درج کرنے سے ف (لا) منفی ہو جاتا ہے۔ لا کو بقدر ایک کے بڑھاؤ تو
لا = ۲ سے ف (لا) مثبت ہو جاتا ہے۔ ف (لا) میں لا = ۲ درج
کرنے سے یہ منفی ہو جاتا ہے۔ لا کو بقدر ایک کے بڑھاؤ تو لا = ۳ سے
ف (لا) مثبت ہو جاتا ہے۔ ف (لا) میں لا = ۳ درج کرنے سے یہ منفی
ہو جاتا ہے۔ پھر لا کو بقدر ایک کے بڑھانے سے ہم دیکھتے ہیں کہ لا = ۴ سے
ف (لا) مثبت ہو جاتا ہے۔ یہیں مطلوبہ علوی انتہا ۴ ہے۔

نیوٹن کے قاعدے کو اس طریقہ سے استعمال کرنے میں ہم نے یہ تسلیم کر لیا ہے
کہ جب کوئی عدد ایک خاص حد تک کے تمام مشق تقاعلوں کو مثبت بناتا ہے
تو اس سے بڑا کوئی عدد بھی ان سب کو مثبت بناتا ہے اور اس طرح سلسلہ
کے پچھلے تقاعلوں پر اس عدد کے اثر کو مشاہدہ کرنے کی ضرورت نہیں۔ یہ امر
مسادات

(188)

$$ف (۱+۵) = ف (۱) + ف (۵) + ف (۱) + ف (۵) + \dots + \frac{۲}{۲ \times ۱}$$

سے ظاہر ہے (سلسلہ کے کسی تفاعل کو فہ (لا) سے تعبیر کر د اور مشتق تفاعلوں کے لئے عام ترتیم استعمال کرو) جس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ اگر فہ (لا) فہ (لا) فہ (لا)..... سب کے سب مثبت ہوں اور ۵ بھی مثبت ہو تو فہ (لا + ۵) کو مثبت ہونا چاہئے۔

یہ امر غور طلب ہے کہ نیوٹن کے طریقہ میں ایک فائدہ یہ ہے کہ اس سے اکثر دو متصل صحیح عددوں کا علم حاصل ہوتا ہے جن کے درمیان بڑی سے بڑی اصل واقع ہوتی ہے۔ مثلاً مثال بالا میں چونکہ لا = ۳ کے لئے ف (لا) منفی اور لا = ۴ کے لئے مثبت ہے اسلئے اس مساوات کی بڑی سے بڑی اصل ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔

۸۹۔ سفلی انتہائیں اور منفی اصولوں کی انتہائیں۔ مثبت

اصولوں کی سفلی انتہا معلوم کرنا ہو تو مساوات کو اول لا = ۱ کے ابدال سے تحویل کرنا چاہئے۔ پھر ما میں جو مساوات حاصل ہوگی اس کی مثبت اصولوں کی علوی انتہا معلوم کرو۔ اسکا مشکافی یعنی ۱/۵ مظلومہ سفلی انتہا ہوگی کیونکہ

$$ما > ۵, \frac{1}{5} < \frac{1}{۵}, \text{ یعنی لا } < \frac{1}{5}$$

منفی اصولوں کی انتہائیں معلوم کرنے کے لئے مجوزہ مساوات کو صرف لا = -۵ کے ابدال سے تحویل کرنا ہوگا۔ یہ استعمال منفی اصولوں کو مثبت اصولوں میں بدل دیکھا۔ فرض کرو کہ ما میں حاصل شدہ مساوات کی مثبت اصولوں کی علوی اور سفلی انتہائیں ۵ اور ۵ ہیں تو مجوزہ مساوات کی منفی اصولوں کی انتہائیں -۵ اور -۵ ہوں گی۔

۹۰۔ انتہائی مساواتیں۔ اگر مساوات ف (لا) = ۰ کی تمام

حقیقی اصلیں معلوم ہو سکیں تو مساوات ف (لا) = ۰ کی حقیقی اصولوں کی

نقد اور معلوم کرنا ممکن ہے۔
 اس کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ $f = 0$ ۔ کی حقیقی اصلیں
 مقدار کے لحاظ سے صعودی ترتیب میں a, b, c, \dots لے ہیں اور
 فرض کرو کہ قیمتوں کا حسب ذیل منسلک a کی بجائے f (لاہیں درج کیا گیا ہے)
 a, b, c, \dots, ∞ ۔
 جب ان مقداروں میں سے کسی دو متصل مقداروں سے مختلف العلما
 نتیجے حاصل ہوں تو ان کے درمیان $f = 0$ ۔ کی ایک اصل ہوگی اور نتیجہ
 صریح دفعہ ۱۰ کی رو سے صرف ایک اصل ہوگی۔ لیکن جب نتیجہ ہم علامت
 ہوں تو اسی نتیجہ صریح کی رو سے ان کے درمیان کوئی اصل موجود نہیں ہوگی۔
 اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ مذکورہ بالا مقداروں کو درج کرنے سے
 نتیجوں میں ہر علامت کی تبدیلی مجوزہ مساوات کی ایک حقیقی اصل
 کو مستلزم ہے۔

اگر $f = 0$ ۔ کی تمام اصلیں حقیقی ہوں تو دفعہ ۱۰ کے مسئلہ سے
 یہ ظاہر ہے کہ $f = 0$ ۔ کی اصلیں بھی حقیقی ہیں اور یہ کہ وہ ایک ایک
 کر کے $f = 0$ ۔ کی اصلوں کے ہر متصل زوج کے درمیان واقع ہوتی
 ہیں۔ اسی صورت میں اور اسی مسئلہ کی رو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ $f = 0$ ۔
 اور باقی سب مشتق تفاعل کی اصلیں بھی حقیقی ہیں اور ان میں سے کسی
 تفاعل کی اصلیں اس تفاعل کی اصلوں کے ہر متصل زوج کے درمیان
 واقع ہوتی ہیں جس کا یہ مشتق ہے۔

اس قسم کی مساواتوں کو جو کسی مجوزہ مساوات کے درجہ سے بقدر
 ایک کے گھٹی ہوئی ہوں اور جنکی اصلیں مجوزہ مساوات کی اصلوں کے ہر متصل
 زوج کے درمیان واقع ہوں ہم انتہائی مساواتیں کہیں گے۔

یہ ظاہر ہے کہ نیوٹن کے طریقہ سے اصلوں کی انتہائیں معلوم کر نہیں
 جب $f = 0$ ۔ کی سب اصلیں حقیقی ہوں تو دفعہ ۸۸ میں بتلائے ہوئے

طریقہ کی بموجب عمل کرنے سے تفاعل ف (لا) خود آخری تفاعل ہو گا جبکہ مثبت بنانا ہو گا اور اس لئے جس علوی اتہا پر ہم پہنچتے ہیں وہ بڑی سے بڑی اصل کے سین بعد کا صحیح عدد ہو گا۔

مثالیں

(188) ۱۔ ثابت کرو کہ ف (لا) = ۰۔ کے کسی مشتق تفاعل ف (لا) = ۰ کی

خیالی اصلیں ف (لا) کی خیالی اصلوں سے زیادہ نہیں ہو سکتیں بلکہ حقیقی اصلیں زیادہ ہو سکتی ہیں۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر کسی مشتق تفاعل میں خیالی اصلوں کا موجود ہونا معلوم ہو تو خیالی اصلوں کی کم از کم اتنی ہی تعداد ابتدائی مساوات میں داخل ہونی چاہئے۔

۲۔ دفعہ ۹۰ کا طریقہ استعمال کر کے وہ شرطیں معلوم کرو کہ مساوات

$$لا - ق لا + ر = ۰$$

کی تمام اصلیں حقیقی ہوں۔

۳۔ اسی طریقہ سے مساوات

$$لا - ن ق لا + (ن - ۱) ر = ۰$$

کی اصلوں کی نوعیت معلوم کرو۔

جواب: جب ن جفت ہو تو دو حقیقی اصلیں ہیں یا کوئی بھی نہیں ہوگا اس کے

$$ق < یا > ن - ۱$$

جب ن طاق ہو تو تین حقیقی اصلیں ہیں یا صرف ایک بہو جب اس کے کہ

$$ق < یا > ن - ۱$$

۴۔ مساوات لا (لا - ۱) = ۰ کی سب اصلیں حقیقی ہیں۔ ن والی مشتق

دسواں باب

مساواتوں کی اصولوں کو جدا کرنا

(189)

۹۱۔ گزشتہ باب کے طریقوں سے ہم وہ حدود معلوم کر سکتے ہیں جن کے درمیان کسی عددی مساوات کی تمام حقیقی اعلیٰیں واقع ہوتی ہیں۔ کسی خاص اصل کو عملاً تقریبی طور پر معلوم کرنے سے پیشتر یہ اصل جس وقفہ میں واقع ہوتی ہے اس کو ایسے وقفوں سے علیحدہ کر لینا ضروری ہے جنہیں باقی دو سری اعلیٰیں واقع ہوتی ہیں۔ اس باب میں چند مسئلے بیان کئے جائینگے جنکا مقصد متغیر کی کسی دو اختیاری طور پر مفروضہ قیمتوں کے درمیان مساوات کی حقیقی اصولوں کی تعداد متعین کرنا ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ اگر یہ مقصد پورا ہو جائے تو نہ صرف حقیقی اصولوں کی کل تعداد معلوم کرنا ممکن ہو جائیگا بلکہ ہم وہ حدود بھی معلوم کر سکیں گے جن کے درمیان اعلیٰیں فرداً فرداً واقع ہوتی ہیں اس مقصد کو پیش نظر رکھ کر فوریر (Fourier) اور بودان (Budan) نے جو مسئلے بیان کئے ہیں وہ اگرچہ طرز بیان کا لحاظ کرتے مختلف ہیں لیکن اسوں میں مماثل ہیں۔ اس اصول کو سبھی اہل علم لئے فوریر کا بیان زیادہ سہولت بخش ہے لیکن عملی طور پر استعمال کرنے پر بودان کے بیان کو ترجیح حاصل ہے۔ سٹورم (Sturm) کا مسئلہ اگرچہ عملاً زیادہ محنت طلب ہے لیکن قبل الذکر پر اس کا فائدہ یہ ہے کہ اس کو استعمال کرنے سے کسی دو مجوزہ مقداروں کے درمیان حقیقی اصولوں کی بالکل ٹھیک تعداد ہمیشہ معلوم ہو جاتی ہے حالانکہ فوریر اور

بودان کے مسئلہ سے صرف ایک خاص حد حاصل ہوتی ہے جسکے آگے حقیقی
اصلوں کی تعداد مجوزہ وقفہ کے اندر تجاوز نہیں کر سکتی۔

۹۲۔ فوریر اور بودان کا مسئلہ۔ فرض کرو کہ دو عدد ۱ اور
ب (۱ > ب) لاکہ بجائے اس سلسلہ میں درج کئے گئے ہیں
جوف (لا) اور اس کے مشتق تفاعلوں سے بنتا ہے یعنی سلسلہ

ذیل میں

ف (لا) ، فم (لا) ، فم (لا) ، فم (لا)

تو حقیقی اصلوں کی تعداد جو ۱ اور ب کے درمیان واقع ہوتی ہیں
اس اضافہ سے بڑی نہیں ہو سکتی جو سلسلہ بالا میں علامتوں کی تبدیلیوں
کی اس تعداد کو جو لا کی بجائے ۱ درج کرنے سے حاصل ہوتی ہیں تبدیلیوں
اس تعداد پر ہے جو لا کی بجائے ب درج کرنے سے حاصل
ہوتی ہیں۔ اور جب اس وقفہ میں حقیقی اصلوں کی تعداد اس اضافہ
سے کم پڑتی ہو تو یہ کئی بقدر ایک جفت عدد کے ہوگی۔
یہ وہ شکل ہے جس میں فوریر اس مسئلہ کو بیان کرتا ہے۔

یہاں یہ یاد رکھنا ضروری ہے کہ جب ہم دو عددوں ۱ اور ب
کا ذکر کرتے ہیں جن میں سے ۱ چھوٹا ہے تو انہیں سے ایک یا دونوں
منفی ہو سکتے ہیں اور مطلب یہ ہوتا ہے کہ ۱ بہ نسبت ب کے -∞
سے زیادہ قریب ہے۔

اب ہم ان تبدیلیوں کی جانچ کرتے ہیں جو سلسلہ بالا کے
تفاعلوں کی علامتوں کے درمیان وقوع پذیر ہو سکتی ہیں جب لا کی

ر تبدیلیاں کم ہوتی ہیں اگر ر جفت ہو
 ر + تبدیلیاں کم ہوتی ہیں اگر ر طاق ہو -

(ب) جب 'ف' (۱) اور 'ف' (۲) مختلف علامت ہوں تو
 ر تبدیلیاں کم ہوتی ہیں اگر ر جفت ہو
 ر - تبدیلیاں کم ہوتی ہیں اگر ر طاق ہو -

اس لئے بحیثیت مجموعی ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ 'ف' (۱) کی ر ضعیف
 اصل میں سے گزرتے وقت تبدیلیوں کی جفت تعداد کم ہو جاتی ہے -
 یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ (۱) (۲) کی ایک خاص صورت ہے اور
 (۳) (۴) کی ایک خاص صورت یعنی جبکہ ر = ۱ - لیکن چونکہ صورتیں
 (۱) اور (۳) اکثر وقوع پذیر ہوتی ہیں اس لئے ان کو علیحدہ جماعت میں
 رکھنا ہی بہتر ہے -

ثبوت بالا پر نظر ثانی کرنے سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ جب 'لا'،
 'اے' ب تک بڑھتا ہے تو علامت کی کسی تبدیلی کا اضافہ نہیں ہو سکتا
 اور یہ کہ 'ف' (۱) = کی ہر واحد اصل میں سے گزرتے وقت
 علامت کی ایک تبدیلی کم ہوتی ہے اور نیز یہ کہ کسی حال میں بھی علامت
 کی تبدیلیوں کی طاق تعداد کم نہیں ہو سکتی سوائے اس صورت کے
 جبکہ 'لا' 'ف' (۱) = کی ایک اصل میں سے گزرے - پس 'اے' ب تک
 'لا' کے کل تغیر میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد جو کم ہوتی ہے
 وہ یا تو اس وقت میں 'ف' (۱) = کی حقیقی اصلوں کی تعداد کے مساوی
 ہونی چاہئے یا اس سے بقدر ایک جفت عدد کے متجاوز ہونی چاہئے -
 اس لئے مسئلہ بالا ثابت ہو گیا -

۹۳ - مسئلہ کا استعمال - اس مسئلہ کو بوڈان نے جس شکل میں

بیان کیا ہے وہ جیسا کہ اوپر مذکور ہوا عملی مقاصد کے لئے زیادہ مہمونت بخشنے

پہنانچہ بوڈان اسکویوں بیان کرتا ہے :- فرض کرو کہ مساوات ف (لا) =
 کی اصلوں کو اول بقدر ۱ کے اور بعد میں بقدر ب کے گھٹا دیا
 گیا ہے جہاں ۱ اور ب کوئی عدد ہیں اور ۱ ب سے چھوٹا
 ہے۔ تب ۱ اور ب کے درمیان حقیقی اصلوں کی تعداد اُس
 اضافہ سے بڑی نہیں ہو سکتی جو پہلی استعمال شدہ مساوات میں علامت کی
 تبدیلیوں کی تعداد کو دوسری استعمال شدہ مساوات میں علامت کی
 تبدیلیوں کی تعداد پر ہے۔

فوریہ کے بیان میں یہ بات صریحاً شامل ہے کیونکہ یہ دونوں استعمال شدہ
 مساواتیں حسب ذیل ہیں (دیکھو دفعہ ۳۳)

$$f_1(1) + f_2(1) + \dots + f_n(1) = 0$$

$$f_1(b) + f_2(b) + \dots + f_n(b) = 0$$

دفعہ مابین کے نتیجوں کو تسلیم کرنے کے بعد ان مساواتوں سے
 مسئلہ بالا کی صداقت ظاہر ہے۔

اس شکل میں مسئلہ کے عملی طور پر سہولت بخش ہونے کی وجہ یہ ہے
 کہ ہم اصلوں کو گھٹا نہ کا وہ طریقہ استعمال کر سکتے ہیں جو دفعہ ۳۳ میں بتایا
 گیا ہے۔

مثالیں

۱۔ مساوات

$$= 1.1 - 0.4 - 0.95 + 0.25 - 0.2 - 0$$

۱۲ = ۱۱ = ۱۰
کی اصلوں کا محل وقوع معلوم کرو۔

ہم اس تفاعل کی جانچ لاکر ان قیمتوں کے لئے کرتے ہیں جو وقفوں

1. '1' '1' -1-1-

کے درمیان واقع ہیں۔ ان عددوں کو صرف اسوجہ سے اختیار کیا گیا ہے کہ عمل حساب میں سہولت پیدا ہو۔ اصولوں کو بقدر ایک کے گھمانے سے استعمال شدہ مساوات کے سروں کا حسب ذیل سلسلہ ملتا ہے

CA- '40' 10' 24- '2'

اصول کو بقدر ۱۰ کے گھٹایا جائے تو عمل حساب کی ابتدا ہی میں یہ ظاہر ہو جاتا ہے کہ استعمال شدہ مساوات کے سروں کی علامتیں سب کی سب مثبت ہوں گی۔ اس لئے اس صورت میں عمل حساب کی تکمیل کرنے کی ضرورت نہیں۔

اصول کو بقدر ۱۰ - اور ۱ - کے گھٹانے میں سہولت اس میں ہے کہ مساوات کی متبادل علامتوں کو بدل کر اصول کو بقدر ۱۰ + اور ۱ - کے گھٹایا جائے اور پھر حاصل شدہ نتیجہ میں متبادل علامتوں کو بدلا جائے جب اصول کو بقدر ۱ - کے گھٹایا جاتا ہے تو استعمال شدہ مساوات کے سر حاصل ہوتے ہیں۔

9-691-13962-8-61

اصول کو بقدر ۱۰ کے گھٹانے میں گزشتہ کی طرح اثنائے عمل میں ہی ہم یہ معلوم کر لیتے ہیں کہ حال شدہ مساوات کی علامتیں سب کی سب مثبت ہیں یعنی جب متبادل علامتوں کو بدل لاجاتا ہے تو وہ باری باری سے مثبت اور منفی ہوتی ہیں۔

اس طرح ہمیں ذیل کا نقشہ ملتا ہے :-

$$- + - + - + (1 \cdot -)$$
$$+ - + - - + \quad (1-)$$

(۰) $- - + - - +$ (خود مساوات کی علامتیں)

(194)

۲۔ مساوات

$$لا^۱ + لا^۲ - لا^۳ = ۱$$

کی اصلوں کے محل وقوع معلوم کرو۔

اسکی سب اصلیں حقیقی ہیں اور ۲ اور ۲ کے درمیان واقع ہوتی ہیں (دیکھو مثال ۵ صفحہ ۱۲۶)۔ جب کبھی کسی مساوات کی تمام اصلیں حقیقی ہوں تو فوراً بر کے تقاطعوں کی علامتوں سے کسی دو تجوزہ صحیح عددوں کے درمیان حقیقی اصلوں کی صحیح تعداد معلوم ہو جاتی ہے۔ چنانچہ ہم نتیجہ ذیل حاصل کرتے ہیں :- اصلیں وقفوں

$$(۲، ۱) (۱، ۰) (۰، ۱) (۱، ۲)$$

کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔

۳۔ مساوات

$$لا^۱ + لا^۲ - لا^۳ + لا^۴ = ۱$$

کا تجزیہ کرو۔

جواب :- وقفہ (۱، ۲) میں دو اصلیں اور وقفوں (۰، ۱) (۱، ۰) (۱، ۲) میں سے ہر ایک میں ایک اصل

۴۔ مساوات

$$لا^۱ + لا^۲ + لا^۳ - لا^۴ + لا^۵ = ۱$$

کا تجزیہ کرو۔

اس مساوات میں منفی اصلیں نہیں ہو سکتیں۔ اصلوں کو متواتر بقدر ۱۰ کے گھاؤ یا نٹک کر سروں کی علامتیں سب کی سب مثبت ہو جائیں۔ نتیجہ ذیل حاصل ہو گا :-

| | | | | | |
|------|---|---|---|---|---|
| (۰) | + | - | + | - | + |
| (۱۰) | - | + | + | - | + |
| (۲۰) | + | + | - | . | + |
| (۳۰) | + | - | + | + | + |
| (۴۰) | + | + | + | + | + |

اس طرح صفر اور ۱۰ کے درمیان ایک اصل ہے، ۱۰ اور ۲۰ کے درمیان ایک اصل، ۲۰ اور ۳۰ کے درمیان کوئی اصل نہیں۔ ۳۰ اور ۴۰ کے درمیان یا تو دو حقیقی اصلیں ہیں یا خیالی اصلوں کا ایک زوج۔ تیسری استیلا شدہ مساوات کی اصلوں کو بقدر اکائیوں کے گھٹانے سے یہ معلوم ہو گا کہ دو حقیقی اصلیں موجود ہیں۔ اس عمل سے اصلیں علیحدہ ہو جائیں گی اور (۲، ۳) اور (۴، ۵) کے درمیان انکا واقع ہونا معلوم ہو جائیگا۔ پس مجوزہ مساوات کی تیسری حقیقی اصل وقفہ (۳۲، ۳۳) میں واقع ہوتی ہے اور چوتھی وقفہ (۳۴، ۳۵) میں۔

۹۴۔ مسئلہ کا استعمال خیالی اصلوں پر۔ اب چونکہ

لا جب ∞ سے ∞ تک گذرتا ہے تو علامت کی صرف تبدیلیاں کم ہو سکتی ہیں اس لئے اگر یہ یقین کر لیں کہ وجہ موجود ہو کہ کسی وقفہ میں جنہیں لا کی کوئی حقیقی اصل شامل نہیں ہوتی علامت کی دو تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں تو ہم یہ یقین کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ خیالی اصلوں کا ایک زوج موجود ہے۔ فوریر کا مسئلہ استعمال کرتے وقت اس قسم کے حالات اس وقت پیدا ہوں گے جب کسی استیلا شدہ مساوات میں معدوم ہونے والے سر شامل ہوں۔ کیونکہ ہم دفعہ ۶ کے اصول کی مدد سے اسے سر کی واجبی علامت متعین کر سکتے ہیں جو لا کی اس قیمت کے عین پیشتر اور عین بعد کی قیمتوں کے جواب میں ہو جس کے اندراج سے یہ سر معدوم ہوتا ہے۔ یہ پورا وقفہ اتنا چھوٹا لینا چاہئے کہ ف (لا) = ۰ کی کوئی اصل اس میں شامل نہ ہوئے پائے۔

(195)

مثالیں

۱۔ مساوات

$$ف(لا) \equiv لا - لا^۲ - لا^۳ + ۲۳ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔

ہونگی

ہم اس تعامل کا امتحان دیتوں ۔ ۱۰۱ کے درمیان کرینگے استحالہ شدہ مساواتیں

$$\frac{1}{2} \text{ ف (۰) لا } + \frac{1}{4} \text{ ف (۰) لا } + \frac{1}{4} \text{ ف (۰) لا } + \frac{1}{4} \text{ ف (۰) لا } = ۰$$

$$\frac{1}{2} \text{ ف (۱) لا } + \frac{1}{4} \text{ ف (۱) لا } + \frac{1}{4} \text{ ف (۱) لا } + \frac{1}{4} \text{ ف (۱) لا } = ۰$$

$$\frac{1}{2} \text{ ف (۱۰) لا } + \frac{1}{4} \text{ ف (۱۰) لا } + \frac{1}{4} \text{ ف (۱۰) لا } + \frac{1}{4} \text{ ف (۱۰) لا } = ۰$$

انہیں سے پہلی مساوات خود مجوزہ مساوات ہے ۔

دفعہ گذشتہ کے طریقہ سے حساب لگایا جائے تو صرف (۱) = ۰ اور ہمیں ذیل کا نقشہ ملے گا :-

$$+ - ۰ - + (۰)$$

$$+ - - ۰ + (۱)$$

$$+ + + + + (۱۰)$$

اب ہم ہر اس سطر کو جس میں صفر سر شامل ہے دو سطروں سے بدل سکتے ہیں ۔ ایک اس قیمت کے جواب میں جو صفر سر پیدا کر نیوالی قیمت سے ذرا چھوٹی ہو اور دوسری اس قیمت کے جواب میں جو اس سے ذرا بڑی ہو علامتیں دفعہ ۶ میں بتلائے ہوئے طریقہ کے بموجب متعین ہونگی ۔ یہ یاد رہے کہ اوپر کے نقشہ میں مشتق تقاضا علوں کو تعبیر کرنے والی علامتیں دفعہ ۶ کی ترتیب کے بالعکس لکھی گئی ہیں ۔ اب نقشہ بالا کی صورت وہ ہوگی جو ذیل میں درج ہے جہاں ۵ ایک بہت چھوٹی مثبت مقدار ہے :-

$$+ - + - + \left. \begin{matrix} ۵ \\ ۵ \end{matrix} \right\} (۰)$$

$$+ - - - + \left. \begin{matrix} ۵ \\ ۵ \end{matrix} \right\} (۱)$$

$$+ + + + + (۱۰)$$

جہاں - ۵ اور + ۵ کے جواب میں حاصل ہونیوالی علامتیں اس شرط کے تحت متعین ہوتی ہیں کہ وہ سر (جو صفر ہوتا ہے جبکہ لا = ۰) کے لئے - ۵ کے لئے علامت میں اس سر سے مختلف ہونا چاہئے جو اس کے عین واسطی جانب ہے اور لا = + ۵ کے لئے یہ دونوں علامتیں وہی ہونی چاہئیں۔
۱- ۵ اور + ۵ کے جواب میں حاصل ہونیوالی علامتیں بھی اسی طرح متعین ہوتی ہیں۔

(۱۹۶)

اب چونکہ وقفہ (- ۵ + ۵) میں علامتوں کی دو تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں اور چونکہ - ۵ اور + ۵ کے درمیان کوئی حقیقی اصل نہیں ہے اس لئے خیالی اصولوں کے ایک زوج کا وجود ثابت ہو گیا۔ ۱ + ۵ اور - ۵ کے درمیان علامتوں کی دو تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں اس لئے اس وقفہ میں یا تو حقیقی اصولوں کا ایک زوج شامل ہے یا خیالی اصولوں کے ایک زوج کا امکان ہے۔ اس سے کوئی صورت صحیح ہے یہ مشتبہ ہے۔

۲- اگر متعدد سر معدوم ہوں تو ہم خیالی اصولوں کے متعدد درواج کا وجود ثابت کر سکتے ہیں۔ یہ بات ذیل کی مثال سے ترشح ہے:-

$$۰ = ۱ - لا$$

- ۵ اور + ۵ کے جواب میں علامتیں وقفہ ۲ کے مسئلہ کی رو سے

یہ ہونگی:-

$$(- ۵) \quad - \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad -$$

$$(+ ۵) \quad - \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +$$

پس چونکہ - ۵ اور + ۵ کے درمیان کوئی اصل موجود نہیں اور چونکہ صفر سے ذرا چھوٹی قیمت سے صفر سے ذرا بڑی قیمت تک جانے میں علامت کی چار تبدیلیاں کم ہوتی ہیں اس لئے ہمیں خیالی اصولوں کے دو زوجوں کے وجود کا یقین ہو جاتا ہے۔ باقی دو اصلیں اس صورت میں صریحاً حقیقی ہیں (دیکھو صفحہ ۱۸) کسی شنائی مساوات میں خیالی اصولوں کی تعداد اس طریقہ سے متعین کی جا سکتی ہے۔

۳۔ مساوات

$$\text{لا} + \text{لا} + \text{لا} = \text{لا} - \text{لا} = ۰$$

کی اصلوں کی نوعیت معلوم کرو۔
لا کی ایک چھوٹی منفی قیمت سے اس کی ایک چھوٹی مثبت قیمت تک
ہمیں علامتوں کا حسب ذیل سلسلہ ملتا ہے۔

$$- + - + + - + - + \quad (۵ -)$$

$$- + . + . . . + \quad (۰)$$

$$- + + + + + + + \quad (۵ +)$$

اب چونکہ یہاں علامت کی چھ تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں اس لئے
خیالی اصلیں تعداد میں چھ ہیں۔ باقی دو اصلیں دفعہ ۱۴ کی رو سے حقیقی ہیں
ایک مثبت اور دوسری منفی۔ منفی اصل - ۲ اور - ۱ کے درمیان واقع
ہوتی ہے اور مثبت اصل صفر اور ایک کے درمیان۔

۴۔ مساوات

$$\text{لا} - ۳ \text{ لا} - \text{لا} + ۱ = ۰$$

کا مکمل تجزیہ کرو۔

اس کی دو اصلیں خیالی ہیں۔ جب کبھی (جیسا کہ موجودہ صورت میں)
اصلیں چھوٹے عدد کے اندر واقع ہوں تو بقدر ایک کے متواتر گھٹانے میں
سہولت ہوگی۔ اس طریقہ سے ہم یہاں صفر اور ایک کے درمیان ایک اصل
معلوم کرتے ہیں اور دوسری ۱ اور ۲ کے درمیان۔ منفی اصلوں کو
معلوم کرتے وقت ہم یہ دیکھتے ہیں کہ بقدر - ۱ کے گھٹانے میں خود - ۱ ایک
اصل ہے اور - ۱ سے ذرا بڑی قیمت کے جواب میں حاصل ہونے والی علامتوں کو
لکھ لیتے ہیں - ۱ اور صفر کے درمیان دوسری منفی اصل کا موجود ہونا معلوم
ہوتا ہے۔

۵۔ مساوات ذیل کا تجزیہ کرو۔

$$\text{لا} + \text{لا} + \text{لا} - ۲۵ \text{ لا} - ۳۶ = ۰$$

اسکی دو اصلیں خیالی ہیں۔ ۲ اور ۳ کے درمیان ایک حقیقی اصل ہے اور وقفوں (۳-، ۲-) اور (۱-، ۲-) کے درمیان دو حقیقی منفی اصلیں ہیں۔

۹۵۔ فوریر اور بوڈان کے مسئلہ سے نتائج صریح:۔ خیالی اصولوں کے وجود کا پتہ لگانا کا وہ طریقہ جو دفعہ مابقی میں بیان ہوا دوہری علامت کا قاعدہ کہلاتا ہے۔ اسی طرح کا ایک قانون جو ڈی گوا سے منسوب کیا جاتا ہے فوریر کے مسئلہ کے انکشاف سے پہلے رائج تھا۔ یہ اور ڈیکارٹ کا قانون علامت فوریر کے مسئلہ کے نتائج صریح ہیں جیسا کہ ہم اب ثابت کرینگے۔

(197)

نتیجہ صریح (۱)۔ خیالی اصولوں کو معلو کر نیکے لئے ڈی گوا

کا قاعدہ۔

اس قاعدہ کو عموماً یوں بیان کیا جاتا ہے:۔ جب کسی مساوات میں ۲ متواتر قہیں موجود نہ ہوں تو مساوات کی خیالی اصلیں تعداد میں ۲ م ہونگی۔ اور جب ۲ م + ۱ متواتر قہیں موجود نہ ہوں تو مساوات کی خیالی اصلیں تعداد میں ۲ م + ۲ یا ۲ م ہونگی بموجب اسکے کہ جن دو رقموں کے درمیان رقموں کی یہ کمی واقع ہوتی ہے وہ علامت میں موافق یا مختلف ہوں۔

یہ قاعدہ ثابت ہو جاتا ہے اگر ہم دفعہ ۹۲ (۲) کی طرح اس بات کی جانچ کریں کہ لا کے ایک چھوٹی منفی قیمت - ۵ سے ایک چھوٹی مثبت قیمت + ۵ تک جانے میں علامت کی کتنی تبدیلیاں کم ہوتی ہیں۔

نتیجہ صریح (۲)۔ ڈیکارٹ کا قانون علامت -

تفاعلوں کے سلسلہ فن (لا) فن_۱ (لا) فن_۲ (لا) فن_۳ ...
 فن_۴ (لا) فن_۵ (لا) فن_۶ (لا) فن_۷ (لا) فن_۸ ...
 کیا جائے تو علامتیں دہی ہونگی جو مجوزہ مساوات کے سروں اور ڈیکارٹ کے
 ... فن_۱ - فن_۲ کی ہیں لیکن + ∞ درج کیا جائے تو سب علامتیں
 مثبت ہونگی۔ فوریر کے مسئلہ میں یہ ثابت ہوا ہے کہ ان حدود کے
 درمیان اصولوں کی تعداد یعنی مثبت اصولوں کی تعداد علامت کی تبدیلیوں
 اس تعداد سے زیادہ نہیں ہو سکتی جو صفر سے + ∞ تک گزرنے میں کم
 ہو جاتی ہیں یعنی علامت کی تبدیلیوں کی اس تعداد سے جو سلسلہ
 فن_۱ فن_۲ ... فن_۸ میں پائی جاتی ہے۔ مثبت اصولوں کے لئے
 ڈیکارٹ کا قانون یہی ہے اور منفی اصولوں کے لئے بھی اسی طرح کا
 قانون حاصل ہوتا ہے اگر ہم منفی اصولوں کو مثبت اصولوں سے بدلیں

نتیجہ صریح (۳)۔ جب ایک عدد ہ ایسا معلوم ہو جائے

جو تفاعلوں فن (لا) فن_۱ (لا) فن_۲ (لا) فن_۳ ... فن_۴ (لا) فن_۵ (لا) فن_۶ ...
 فن_۷ (لا) میں سے ہر ایک کو مثبت بناتا ہے تو چونکہ + ∞ بھی ان میں
 ہر ایک کو مثبت بناتا ہے اس لئے فوریر کے مسئلہ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ
 ہ اور ∞ کے درمیان کوئی اصل نہیں ہو سکتی یعنی مثبت اصولوں کی
 ایک علوی حد ہ ہے اور یہی نیومن کا مسئلہ ہے (دفعہ ۸۸)۔

۹۶۔ اسٹرم کا مسئلہ۔ ہم نے پہلے یہ بتا دیا ہے (دفعہ ۷۴) کہ (۱۹۸)

کثیر الارقام ف (لا) اور اس کے پہلے مشتق تفاعل ف (لا) کا مقسم علیہ عظم معمولی جبری طریقوں سے نکال کر مسادات ف (لا) = کی مساوی اصلوں کو معلوم کرنا کس طرح ممکن ہے۔ اسٹرم نے یہی طریقہ ان امدادی تفاعلوں کو بنانے میں استعمال کیا ہے جن سے کسی مسادات کی اصلوں کو جدا کرنا نہیں مدد لی جاتی ہے۔

فرض کرو کہ ف (لا) اور اس کے پہلے مشتق تفاعل ف (لا) کا مقسم علیہ عظم نکالنے کا عمل پورا کر دیا گیا ہے۔ یکے بعد دیگرے آئیو الے باقی درجہ میں گھٹتے جائینگے یہاں تک کہ ہم یا تو ایسے باقی پڑ جائینگے جو اپنے سے عین قبل کے باقی کو پورا پورا تقسیم کرتا ہے یا ایسے باقی بڑ جس میں متغیر سرے سے شامل ہی نہیں ہوتا یعنی جو عددی ہے۔ موخر الذکر صورت میں مساوی اصلوں کا وجود نہ ہوگا اور قبل الذکر صورت میں جیسا کہ ہم نے دیکھا ہے مساوی اصلوں کی موجودگی ظاہر ہوتی ہے۔ اسٹرم کے مسئلہ کو ان دو صورتوں میں تقسیم کر کے ان پر جداگانہ بحث کرنا سہولت بخش ہے۔ ہم اس دفعہ میں اس صورت پر غور کریں گے جس میں مساوی اصلیں موجود نہیں ہوتیں اور دفعہ آئندہ میں مساوی اصلوں کی صورت پر۔ خود عمل کی تکمیل سے یہ بات واضح ہو جائیگی کہ کسی دی ہوئی مثال کو کس جماعت سے متعلق کرنا چاہئے۔

اسٹرم کے امدادی تفاعل وہ باقی نہیں ہیں جو عمل حساب میں خود پیش ہوتے ہیں بلکہ وہ باقی جنکی علامتیں تبدیل کر دی گئی ہوں۔

دو جملوں کا مشترک مقسم علیہ عظم معلوم کرنے میں باقیوں کی علامتوں کو بدلنے یا نہ بدلنے سے کوئی ہرج واقع نہیں ہوتا لیکن اسٹرم کے امدادی تفاعل بنانے میں انکی تبدیلی لازمی ہے۔ اس لئے ہم آئندہ یہ فرض کر لینگے کہ ہر باقی کی علامت اس کے مقسم علیہ ہونے سے پیشتر بدل دی گئی ہے۔ فی الحال اس صورت کو لینے سے جس میں مساوی اصلیں موجود نہ ہوں

اسٹرم کا مسئلہ یوں بیان کیا جاسکتا ہے :-

مسئلہ :- فرض کرو کہ n + اتفاعلوں کے سلسلہ

ف (لا) ، ف (لا) ، ف (لا) ، ، ف (لا) ، ف (لا)

(199)

میں لا کی بجائے کوئی دو حقیقی مقداریں ۱ اور ب درج کی گئی

ہیں جہاں سلسلہ بالا میں دیا ہوا تفاعل ف (لا) اس کا پہلا

مشق ف (لا) اور ف (لا) اور ف (لا) کا مشترک

مقسوم علیہ اعظم نکالنے کے عمل میں یکے بعد دیگرے آئیوں اے باقی

(بہ تبدیل علامت) شامل ہیں۔ تب سلسلہ بالا میں علامت

کی تبدیلیوں کی وہ تعداد جو لا کی بجائے ۱ درج کرنے سے

حاصل ہوتی ہے اور وہ تعداد جو لا کی بجائے ب درج کرنے

سے حاصل ہوتی ہے ان دونوں کا فرق مساوی ف (لا) =

کی حقیقی اصولوں کی تعداد کو جو ۱ اور ب کے درمیان واقع

ہیں ٹھیک طور پر بیان کرتا ہے۔

اسٹرم کے تفاعلوں کو بنانے کے طریقہ سے مساواتوں کا

حسب ذیل سلسلہ ملتا ہے جس میں ق ، ق ، ، ق ، ق وہ

خارج قسمت ہیں جو مقسوم علیہ اعظم نکالنے کے عمل میں یکے بعد

دیگرے حاصل ہوتے ہیں :-

$$\begin{aligned}
 & \text{ف (لا) = ق ف (لا) - فم (لا)} \\
 & \text{ف (لا) = ق فم (لا) - فم (لا)} \\
 & \text{ف (لا) = ق ف (لا) - ف (لا)} \\
 & \text{ف (لا) = ق ف (لا) - ف (لا)}
 \end{aligned}$$

(۱)

ان مساداتوں میں مقسوم علیہ اعظم نکالنے کے طریقہ کا نظریہ شامل ہے۔ کیونکہ پہلی مسادات سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ اگر ف (لا) اور فم (لا) میں کوئی جزو ضربی مشترک ہو تو اسکوف (لا) کا ایک جزو ضربی ہونا چاہئے، اور دوسری مسادات سے اسی طرح کے استدلال سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ وہی جزو ضربی فم (لا) میں بھی واقع ہونا چاہئے، و قس علی ہذا، یہاں تک کہ ہم آخری باقی پر پہنچ جائیں جو ف (لا) اور فم (لا) میں مشترک اجزائے ضربی ہونے کی صورت میں ایسا کثیر الارقام ہو گا جیسے یہ اجزائے ضربی شامل ہونگے۔ اس دفعہ میں جہاں ہم نے یہ فرض کر لیا ہے کہ دئے ہوئے کثیر الارقام اور اس کے پہلے مشتق تفاعل میں کوئی جزو ضربی مشترک نہیں ہے آخری باقی ف (لا) عددی ہو گا۔ مسئلہ کے ثبوت کے لئے اس بات کا مشاہدہ کرنا بھی لازمی ہے کہ زیر بحث صورت میں سلسلہ کے کوئی دو متصل تفاعل کوئی مشترک جزو ضربی نہیں رکھتے کیونکہ اگر ایسا ہوتا تو ہم اسی طرح کے استدلال سے جو اوپر استعمال ہوا مندرجہ بالا مساداتوں کے ذریعہ یہ ثابت کر سکتے کہ اس جزو ضربی کو ف (لا) اور فم (لا) میں بھی موجود ہونا چاہئے اور ایسی صورت ہمارے مفروض کے خلاف ہے۔ پس لاکے اسے بے تک جانے میں سلسلہ بالا میں علامت کی جو تبدیلیاں وقوع پذیر ہوتی ہیں ان کا امتحان کرتے وقت

(200)

اہم وہ صورت خارج کر سکتے ہیں جس میں دو متصلہ تفاعل متغیر کی ایک ہی قیمت کے لئے معدوم ہوتے ہیں چنانچہ وہ مختلف صورتیں جنہیں علامت کی کوئی تبدیلی واقع ہو سکتی ہے ذیل میں درج کی جاتی ہیں:-

(۱) جب 'لا' مجوزہ مساوات ف (لا) = کی ایک اصل میں سے گزرے

(۲) جب 'لا' ایسی قیمت میں سے گزرے جو اعدادی تفاعلوں

ف، ف، ف میں سے ایک کو صفر بناتی ہے۔

(۳) جب 'لا' ایسی قیمت میں سے گزرے جو سلسلہ

ف، ف، ف، ف میں سے دو یا زیادہ تفاعلوں کو

صفر بناتی ہے بشرطیکہ معدوم ہونیوالے دو تفاعل متصل نہ ہوں۔

(۱) جب 'لا' مساوات ف (لا) = کی ایک اصل میں سے گزرتا ہو تو دفعہ ۵ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ علامت کی ایک تبدیلی کم ہو جاتی ہے کیونکہ گزرنیکے عین قبل ف (لا) اور ف (لا) مختلف علامتیں رکھتے ہیں اور گزرنیکے عین بعد موافق علامتیں۔

(۲) فرض کرو کہ لا کی قیمت ع سے مساوات ف (لا) = پوری ہوئی ہے تو مساوات

$$ف_1(لا) = ق_1 ف_2(لا) - ف_3(لا)$$

$$سے \quad ف_1(ع) = - ف_3(ع)$$

جس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ لا کی اس قیمت سے ف (لا) اور ف (لا) کی عددی قیمت ایک ہی ہوتی ہے مگر مختلف

علامتوں کے ساتھ۔ عہ سے ذرا کم قیمت سے ذرا بڑی قیمت تک گزرنے میں ہم اس وقفہ کو اتنا چھوٹا فرض کر سکتے ہیں کہ اس میں ف (لا) یا ف (لا) کی کوئی اصل شامل نہ ہو۔ اس لئے زیر بحث پورے وقفہ میں یہ دونوں تفاعل اپنی اپنی علامتیں برقرار رکھتے ہیں۔ اگر ف (لا) کی علامت نہ بدلے (اور یہ بات اس مستثنیٰ صورت میں واقع ہوگی جب اصل عہ جفت مرتبہ تکرار پاتی ہو) تو علامتوں کے سلسلہ میں کوئی تغیر نہ ہوگا۔ عموماً ف (لا) کی علامت بدلیگی لیکن اس سے تینوں تفاعلوں کے جٹ میں نہ تو علامت کے کسی تغیر کا اضافہ ہوگا نہ کمی کیونکہ ف (لا) اور ف (لا) میں علامتوں کا اختلاف ہونے کی وجہ سے گزرنے کے عین قبل اور عین بعد دونوں صورتوں میں علامت کا ایک تغیر اور ایک استقلال موجود ہوگا خواہ درمیانی تفاعل ف (لا) کی علامت کچھ بھی ہو۔ مثلاً اگر گزرنے کے قبل علامتیں ++ - - ہوں تو گزرنے کے بعد یہ ++ - - ہو جائیں گی یعنی ایک تغیر اور ایک استقلال ایک استقلال اور ایک تغیر میں بدل گئے ہیں لیکن علامت کے تغیر و کمی تعداد میں بحیثیت مجموعی کوئی کمی بیشی نہیں ہوئی۔

(201)

(۳) پچھلی صورتوں میں استقلال کی بنیاد چونکہ صرف ان روابط پر رکھی گئی ہے جو ایک تفاعل کو اس کے متعلقہ تفاعلوں کے ساتھ ہوتے ہیں اور چونکہ یہ روابط موجودہ صورت میں غیر متبدل رہتے ہیں کیونکہ کوئی دو متعلقہ تفاعل یا ہم معدوم نہیں ہونے اس لئے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ اگر ف (لا) معدوم ہو بیوا لے تفاعلوں میں سے ایک تفاعل ہو تو علامت کی ایک تبدیلی کم ہو جاتی ہے اور اگر ف (لا) معدوم نہ ہو تو علامت کی کوئی تبدیلی نہ کم ہوئی ہے نہ زیادہ

پس ہم نے یہ ثابت کر دیا کہ جب 'لا' مساوات ف (لا) = کی ایک اصل میں سے گزرتا ہے تو علامت کی ایک تبدیلی کم ہو جاتی ہے اور کسی دوسرے حالات کے تحت علامت کی تبدیلی نہ کم ہوتی ہے نہ زیادہ۔ اس لئے لا کے ا سے ب تک جانے میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد 'ا' اور ب کے درمیان مساوات کی اصلوں کی تعداد کے مساوی ہوتی ہے۔

مساوی اصولوں کی صورت پر غور کرنے سے پیشتر ہم اسٹرم کے مسئلہ کو چند سادہ مثالوں سے واضح کرینگے۔ علامت سہولت اس میں ہے کہ اسٹرم کے تقاضوں میں لا کی بجائے پہلے ∞ ، $+$ ، ∞ درج کیا جائے تاکہ منفی اور مثبت اصولوں کی کل تعداد حاصل ہو جائے۔ منفی اصولوں کو جدا کرینگے لئے اعداد صحیح -۱، -۲، -۳، وغیرہ کو متواتر درج کرنا ہو گا۔ یہاں تک کہ ہم علامتوں کے اس سلسلہ پر پہنچ جائیں جو ∞ کے درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ مثبت اصولوں کو جدا کرینگے لئے ہم ۱، ۲، ۳، وغیرہ کا اندراج کرتے ہیں یہاں تک کہ علامتوں کا وہ سلسلہ حاصل ہو جائے جو ∞ کے درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

طالب علم کو یہ معلوم کرنے میں اکثر وقت ہوگی کہ اسٹرم کے سلسلہ میں کم شدہ علامت کی تبدیلیوں کی تعداد کو کس طرح محفوظ کیا جاسکتا ہے کیونکہ جو نقصان واقع ہوتا ہے وہ صرف پہلے دو تقاضوں ف (لا) اور ف (لا) کے درمیان واقع ہوتا ہے۔ اس وقت کو دور کر نہیں اس بات سے مدد مل سکتی ہے کہ جب 'لا' ف (لا) = کی ایک اصل سے دوسری اصل یہ تک بڑھتا ہے تو اگرچہ علامت کی تبدیلیوں کی تعداد میں کوئی تغیر واقع نہیں ہوتا لیکن ف (لا) اور بعد کے تقاضوں میں علامتوں کی تقسیم اس طور پر بدلتی ہے کہ ف (لا) اور ف (لا) کی علامتیں جو لا کے ع میں سے گزرنیکے عین بعد ایک ہی تھیں یہ میں گزرنیکے عین قبل پھر مختلف ہو جاتی ہیں۔

مثالیں

۱۔ مساوات

$$ف (لا) \equiv لا^۳ - لا^۲ - لا - ۵ = ۰$$

کی حقیقی اصولوں کی تعداد اور ان کا محل وقوع معلوم کرو۔

یہاں $ف (لا) = لا^۳ - لا^۲ - لا - ۵$ ، $ف (لا) = لا^۲ + لا - ۱۵$ ، $ف (لا) = ۶۴۳$

لا کی قیمتوں - ∞ ، ۰ ، ۱ کے جواب میں ہم حاصل کرتے ہیں

$$- - + - (\infty -)$$

$$- + - - (۰)$$

$$- + + + (\infty +)$$

پس صرف ایک حقیقی اصل ہے اور وہ مثبت ہے۔

پھر لا کی قیمتوں ۱، ۲، ۳ کے جواب میں ہم حاصل کرتے ہیں

$$۱ - + + - (۱)$$

$$۲ - + + - (۲)$$

$$۳ - + + + (۳)$$

اس لئے یہ حقیقی اصل ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔

۲۔ مساوات

$$لا^۳ - لا^۲ + لا - ۷ = ۰$$

کی حقیقی اصولوں کی تعداد اور ان کا محل وقوع معلوم کرو۔

ہم یہ آسانی حاصل کرتے ہیں

$$ف (لا) = لا^۳ - لا^۲ - ۷$$

$$ف (لا) = لا^۲ - لا - ۳$$

$$ف (لا) = ۱$$

اور

$$+ - + - (\infty -)$$

$$+ - - + (0)$$

$$+ + + + (\infty +)$$

پس تمام اصلیں حقیقی ہیں، ایک منفی اور دو مثبت۔
نیز ہمیں ذیل کے نتیجے ملتے ہیں:-

$$+ - + - (4 -)$$

$$+ - + + (3 -)$$

$$+ - + + (2 -)$$

$$+ - - + (1 -)$$

$$+ - - + (1)$$

$$+ + + + (2)$$

یہاں - ۴ اور + ۲ سے علامتوں کے وہی سلسلے ملتے ہیں جو
- ۵ اور + ۵ سے حاصل ہوتے ہیں اور اسلئے ہم انہیں برگزگ جاتے
ہیں۔ منفی اصل - ۴ اور - ۳ کے درمیان واقع ہوتی ہے اور دو مثبت
اصلیں ۱ اور ۲ کے درمیان۔

اس مثال سے فوریر کے مسئلہ پر اسٹرم کے مسئلہ کی فوقیت واضح
ہو جاتی ہے۔

فوریر کے تفاعلوں میں ۱ اور ۲ کے اندراج سے علامتوں کے
حسب ذیل سلسلے ملینگے جنکی تصدیق آسانی کے ساتھ کیا سکتی ہے:-

$$+ + - + (1)$$

$$+ + + + (2)$$

اب فوریر کے مسئلہ سے ہم صرف یہ نتیجہ نکالنے کا حق رکھتے ہیں کہ
۱ اور ۲ کے درمیان دو سے زیادہ اصلیں نہیں ہو سکتیں۔ لیکن اسٹرم کے

مسئلہ سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ ۱ اور ۲ کے درمیان دو اصلیں ہیں۔
اگر ان اصولوں کو جدا کرنا مقصود ہو تو ہمیں ف (لا) میں مزید اندراجات
کرنے چاہئیں۔

۳۔ مسادات

$$۱ - ۲ = ۳ \quad ۲ - ۳ = ۱ \quad ۳ - ۱ = ۲$$

کی حقیقی اصولوں کی تعداد اور انکا محل وقوع دریافت کرو۔
مشق سے جزو ضربی ۲ کو علیحدہ کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$ف (لا) = ۲ - ۳ = ۱ \quad ۳ - ۱ = ۲ \quad ۱ - ۲ = ۳$$

$$ف (لا) = ۱ - ۲ = ۳ \quad ۲ - ۳ = ۱ \quad ۳ - ۱ = ۲$$

$$ف (لا) = ۳ - ۱ = ۲ \quad ۱ - ۲ = ۳ \quad ۲ - ۳ = ۱$$

$$ف (لا) = ۲ - ۳ = ۱ \quad ۳ - ۱ = ۲ \quad ۱ - ۲ = ۳$$

[نوٹ :- جیسا کہ مساداتوں (۱) سے واضح ہے اسٹرم کے
تفعلوں کو بنانے میں اسکی اجازت ہے کہ عددی اجزائے ضربی کو داخل یا خارج
کیا جائے بالکل اسی طرح جس طرح مقسوم علیہ اعظم نکالنے کے عمل میں لیکن
اس بات کا خیال رہے کہ یہ اجزا مثبت ہوں تاکہ باقیوں کی علامتیں بدلنے
نہ پائیں۔]

علامتوں کے حسب ذیل سلسلے ملینگے

$$(- \infty) \quad - \quad + \quad + \quad - \quad +$$

$$(0) \quad - \quad - \quad + \quad + \quad -$$

$$(+ \infty) \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

پس دو اصلیں حقیقی ہیں ایک مثبت اور ایک منفی اور دو اصلیں
خیالی ہیں حقیقی اصولوں کا مقام معلوم کر نیکی لئے صرف ف (لا) میں مثبت
اور منفی اعداد صحیح کو متواتر درج کرنا کافی ہے کیونکہ صرف ایک اصل
مثبت اور ایک اصل منفی ہے۔ اس طریقہ سے ہمیں یہ آسانی یہ معلوم
ہو جائیگا کہ منفی اصل - ۲ اور - ۳ کے درمیان واقع ہوتی ہے اور مثبت اصل

صفر اور ایک کے درمیان -

۹۷۔ اسٹرم کا مسئلہ - مساوی اصلیں - فرض کرو کہ

ف (لا) اور ف (لا) کا مشترک مقسوم علیہ اعظم نکالنے کا عمل پورا کر دیا گیا ہے اور حسب سابق متواتر انبوائے باقیوں کی علامتیں بدل چکی ہیں اسٹرم کا آخری تفاعل موجودہ صورت میں عددی نہیں ہو گا کیونکہ یہاں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ ف (لا) اور ف (لا) کا ایک مشترک جزو ضربی ایسا ہے جس میں لا شامل ہوتا ہے اور اسلئے یہی وہ آخری تفاعل ہو گا جو متذکرہ صدر عمل سے حاصل ہوتا ہے - فرض کرو کہ تفاعلوں کا سلسلہ ہے

ف (لا) ، ف (لا) ، ف (لا) ، ... ، ف (لا)

اب ف (لا) = کی معنی اصل کے سوا لا جب کسی قیمت میں

سے گذرتا ہے تو دفعہ ماضی کے نتائج سلسلہ بالا پر بھی صادق آتے ہیں کیونکہ کوئی قیمت سوائے ضعیفی اصل کے سلسلہ کے کسی دو متصل

تفاعلوں کو معدوم نہیں کر سکتی - لیکن جب 'لا' مساوات ف (لا) =

کی ایک ضعیفی اصل میں سے گذرتا ہے تو دفعہ ۵ کے نتیجہ صریح کی رو سے

ف (لا) اور ف (لا) کے درمیان علامت کی ایک تبدیلی کم ہو جاتی

ہے اور اب ہم یہ ثابت کر چکے کہ سلسلہ کے باقی دو سرے تفاعلوں یعنی

ف (لا) ، ف (لا) ، ف (لا) میں علامت کی کسی تبدیلی کا نہ اضافہ ہوتا

ہے نہ کمی - فرض کرو کہ ف (لا) کی ایک م ضعیفی اصل عہ موجود ہے

تو دفعہ ۹۶ کی مساواتوں (۱) سے یہ ظاہر ہے کہ تفاعلوں ف (لا) ، ف (لا) (204)

... ف (لا) سے ہر ایک میں (لا - عہ) ایک جزو ضربی ہے

فرض کرو کہ ان تفاعلوں میں بقیہ اجزائے ضربی علی الترتیب ف (لا) ، ف (لا) ،

... ف (لا) ہیں - مذکورہ بالا مساواتوں (۱) کو (لا - عہ) سے تقسیم کرو تو

مشترک مقسوم علیہ اعظم ہے اور ہر شعفی اصل کو صرف ایک مرتبہ شمار کیا گیا ہے۔

مثالیں

۱۔ مساوات

$$لا^۵ - لا^۳ + ۹ لا^۲ - ۷ لا + ۲ = ۰$$

کی اصولوں کی نوعیت معلوم کرو۔
ہم آسانی کے ساتھ حاصل کرتے ہیں

$$ف (لا) = لا^۴ - لا^۳ + ۱۵ لا^۲ + ۱۸ لا - ۷$$

$$ف (لا) = لا^۳ - لا^۲ + ۲ لا + ۱$$

ف (لا) ، ف (لا) کو پوری طرح تقسیم کر دیتا ہے۔ پس اس صورت میں اسٹرم کا سلسلہ ف (لا) پر آکر رک جاتا ہے اور اس طرح مساوی اصولوں کے وجود کو ثابت کرتا ہے۔

(205) مساوات کی حقیقی اصولوں کی تعداد معلوم کرنے کے لئے ہم تقاطعوں
ف ، ف ، ف کے سلسلہ میں لا کی بجائے -۷ اور +۷ درج کرتے
ہیں تو حاصل ہوتا ہے

$$+ - + (\infty -)$$

$$+ + + (\infty +)$$

پس مساوات کی صرف دو حقیقی جداگانہ اصلیں ہیں۔ انہیں سے ایک تہری اصل ہے جیسا کہ ف (لا) کی شکل سے ظاہر ہے جو (لا - ۱) کے مساوی ہے۔

۲۔ مساوات

$$لا^۶ - لا^۳ + ۱۳ لا^۲ - ۱۲ لا + ۴ = ۰$$

کی اصولوں کی نوعیت معلوم کرو۔

یہاں

$$ف_۱ (لا) = لا^۳ - لا^۲ + لا - ۱۲$$

$$ف_۲ (لا) = لا^۳ - لا^۲ + لا - ۲$$

ف_۳ (لا) اسٹرم کا آخری تفاعل ہے اور اسلئے مساوات کی مساوی اصلیں موجود ہیں۔

$$+ - + (\infty -)$$

$$+ + + (\infty +)$$

صرف دو حقیقی جداگانہ اصلیں ہیں اور چونکہ ف_۳ (لا) = (لا - ۱)(لا - ۲) اصلوں ۱ اور ۲ میں سے ہر ایک دوہری اصل ہے۔

۳۔ مساوات

$$لا^۵ + لا^۴ - لا^۲ - لا - ۱ = ۰$$

کی اصلوں کی نوعیت دریافت کرو۔

یہاں

$$ف_۱ = لا^۵ + لا^۴ - لا^۳ + لا^۲ - لا - ۲$$

$$ف_۲ = لا^۵ + لا^۴ - لا^۳ + لا^۲ - لا - ۱$$

$$ف_۳ = لا^۵ - لا^۴ - لا^۳ - لا - ۵$$

$$ف_۴ = لا^۵ - لا^۴ - لا^۳ - لا - ۱$$

$$ف_۵ = لا^۵$$

چونکہ ف_۵ = لا^۵ اور ف_۱ کا مشترک مقسوم علیہ اعظم لا + ۱ ہے اور ف_۱ (لا) کی ایک دوہری اصل - ۱ ہے۔ نیز

$$+ - - + - (\infty -)$$

$$- - + + + (\infty +)$$

پس حقیقی جداگانہ اصلیں ہیں۔ اسلئے مساوات کی دوہری اصل کے سوا ایک دوسری حقیقی اصل ہے اور دو اصلیں خیالی ہیں۔

۴۔ مساوات

$$۶ - ۷ لا + ۱۵ لا - ۴ لا + ۴۸ لا - ۱۶ =$$

کی اصولوں کی نوعیت معلوم کرو۔

یہاں

$$۴۸ + ۸۰ لا - ۶۰ لا + ۳۵ لا - ۶ لا = ۴۸$$

$$۴۸ + ۱۷۶ لا - ۱۹۲ لا + ۸۴ لا - ۱۳ لا = ۴۸$$

$$۴۸ + ۱۷۶ لا - ۱۹۲ لا + ۸۴ لا - ۱۳ لا = ۴۸$$

جواب۔ تین جداگانہ حقیقی اصلیں انہیں سے ایک چوہری

۹۸۔ اسٹرم کے مسئلہ کا استعمال۔ اعلیٰ درجہ کی مساواتوں کی (208)

صورت میں اسٹرم کے امدادی تفاضلوں کو محسوب کر کے عمل اکثر بہت محنت طلب ہو جاتا ہے۔ اسلئے چند ایسے نکات کو پیش نظر رکھنا ضروری ہے جنکی مدد سے اس محنت میں تخفیف ہونے کا امکان ہے۔

(۱) آخری باقی محسوب کرنے میں جبکہ وہ عددی ہو چونکہ صرف اسکی علامت سے ہمیں واسطہ پڑتا ہے اس لئے آخری عمل تقسیم سے آرم بیچ سکتے ہیں کیونکہ لا کی وہ قیمت جو ف کو معدوم کرتی ہے ف

اور ف کو مختلف علامت بنا دیتی ہے۔ عموماً بغیر کسی عمل حساب کے یہ بتانا ممکن ہے کہ اگر ف (۱) = ۰ کی اصل کو ف (۲) میں

درج کیا جائے تو حاصل کی علامت کیا ہوگی۔ چنانچہ دفعہ ۹۶ مثال ۳ میں اگر ف (۱) = ۰ کی اصل - ۳ کو ۹ لا - ۲۷ لا + ۱۱ میں لا کی بجائے

درج کیا جائے تو حاصل کی علامت صریحاً مثبت ہے، پس ف (۱) کی علامت منفی ہے اور اس لئے لا کی قیمت - ۳ کے جواب میں

فن (۱) کی قیمت - ۱۴۳۳ کو محسوب کرنے کی ضرورت نہیں۔
 (۲) جب کسی طرح سے یہ پہچان لینا ممکن ہو کہ اسٹرم کے
 تفاعلوں میں سے کسی ایک کی سبب اصلیں خیالی ہیں تو کسی اور تفاعل
 کو اس تفاعل کے آگے محسوب کرنے کی ضرورت نہیں پڑتی کیونکہ ایسا
 تفاعل متغیر کی تمام قیمتوں کے لئے ہمیشہ ایک ہی علامت برقرار
 رکھتا ہے (دفعہ ۱۲ نتیجہ صریح) اور اس لئے اسکی اور اسکے بعد آنوالے
 تفاعلوں کی علامت کی تبدیلیوں کی تعداد میں کبھی بھی کوئی تغیر واقع پذیر
 نہیں ہو سکتا چنانچہ جب دو مقداریں ۱ اور ۲ درج کیجائی ہیں تو
 تبدیلیوں کی تعداد میں جو فرق ہوتا ہے وہ علامت کے ان تغیرات پر
 منحصر نہیں ہوتا جو سلسلہ کے اس حصہ میں موجود ہو سکتی ہیں جس میں
 زیر بحث تفاعل اور اس کے بعد آنوالے تفاعل شامل ہیں۔ اس نتیجہ
 کو استعمال کرنے میں ہمیشہ مناسب یہ ہے کہ جب ہم دو درجی تفاعل
 (مثلاً ۱ + ۲ + ۳) پر پہنچیں تو اس بات کا امتحان کر لیں کہ ۱ + ۲
 والی رقم اور مطلق رقم ہم علامت ہونے کی صورت میں (اگر ایسا نہیں
 ہے تو اصلیں خیالی نہیں ہو سکتیں) آیا شرط ۴ درج ۱ + ۲ + ۳ پوری
 ہوتی ہے یا نہیں۔ اگر یہ شرط پوری ہوتی ہو تو ہم جانتے ہیں کہ اصلیں
 خیالی ہونگی اور عمل حساب کو آگے بڑھانے کی ضرورت نہیں۔
 جب تفاعلوں میں سے کوئی ایک کال مرتب ہو تو اس صورت
 پر بھی اوپر کے نتائج کا اطلاق ہوتا ہے کیونکہ ایسا تفاعل لاکی حقیقی قیمتوں
 کے لئے اپنی علامت نہیں بدلتا۔

مثالیں

۱۔ مسادات

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۱$$

کا تجزیہ کرو۔

ہم معلوم کرتے ہیں

$$ف^۳(لا) = -۲۹لا^۲ - ۸لا + ۱۴$$

$$ف^۴(لا) = -۸۶لا - ۸۱$$

$$ف^۵(لا) = -$$

یہاں ہم یہ دیکھتے ہیں کہ لا کی وہ قیمت جو مساوات $ف^۳(لا) = ۰$ سے حاصل ہوتی ہے اور جو $۱/۳$ سے بہت چھوٹا فرق رکھتی ہے $ف^۴(لا)$ کو مثبت بناتی ہے۔ پس $ف^۳(لا)$ منفی ہے۔ مساوات کی دو اصلیں حقیقی ہیں اور دو خیالی۔ حقیقی اصلیں و قفوں $(-۲، -۱)$ میں واقع ہوتی ہیں۔

۲۔ مساوات

$$لا^۴ - ۴لا^۳ + ۳لا + ۰ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔

ہم معلوم کرتے ہیں

$$ف^۳(لا) = ۱۲لا^۲ + ۹لا - ۸۹$$

$$ف^۴(لا) = -۴۹لا + ۱۳۴۱$$

$$ف^۵(لا) = -$$

یہاں $ف^۳(لا) = ۰$ سے حاصل ہوتا ہے $لا = \frac{۱۳۴۱}{۴۹} < \frac{۱۳۴۱}{۵۰} < \frac{۱۳۴۱}{۵۰}$

$\frac{۵}{۴} < ۲.۶۲۵$ اور $لا = \frac{۵}{۴}$ ، $ف^۴(لا)$ کو مثبت بناتا ہے۔ اس لئے $ف^۳(لا)$ کی اصل بھی اس کو مثبت بناتی ہے۔

مساوات کی دو اصلیں حقیقی ہیں اور دو خیالی۔ حقیقی اصلیں و قفوں $(۲، ۳)$ میں واقع ہوتی ہیں۔

۳۔ مساوات

$$لا^۲ - ۱۳لا^۲ + ۱۰لا - ۱۹ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔

یہاں

$$ف_۱ (لا) = لا^۲ - لا^۱۳ + ۵$$

$$ف_۲ (لا) = لا^۱۳ - لا^۱۵ + ۳۸$$

چونکہ $۳۸ \times ۱۳ \times ۲ < ۲۱۵$ ، $ف_۲ (لا)$ کی اصلیں خیالی ہیں اسلئے ہم اسٹرم کے یقینہ تعالوں کو محسوب نہیں کرتے۔

$$- \infty + \infty \text{ درج کرنے سے}$$

$$+ - + (\infty -)$$

$$+ + - (-)$$

$$+ + + (\infty +)$$

پس دو اصلیں حقیقی ہیں ایک مثبت اور دوسری منفی۔

۴۔ مساوات

$$ف (لا) \equiv لا^۵ + لا^۲ + لا^۴ - لا^۳ - لا^۵ = ۵$$

کا تجزیہ کرو۔

$$ف_۱ (لا) = لا^۵ + لا^۸ + لا^۳ - لا^۸ - لا^۳ = ۳$$

$$ف_۲ (لا) = لا^۶ + لا^۶ + لا^۴ + لا^۴ + لا^۱۱۹$$

$$ف_۳ (لا) = - لا^۱۱۶ - لا^۵۷ - لا^۲۲۳$$

چونکہ $۱۱۶ \times ۲۲۳ < ۲۵۷$ ، باقی تعالوں کو معلوم کر نیکی ضرور نہیں۔

$$- \infty + \infty \text{ درج کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ}$$

$$- - + - (\infty -)$$

$$- + - - (-)$$

$$- + + + (\infty +)$$

چار اصلیں خیالی ہیں اور ایک حقیقی مثبت اصل۔

۵۔ مساوات

$$لا^۲ - لا^۳ + لا^۱۰ + لا^۱۰ = ۱۰$$

کی حقیقی اصلوں کی تعداد اور انکا محل وقوع معلوم کرو۔

جواب :- سب اصلیں حقیقی ہیں دو اصلیں منفی (۳، ۲)۔

(۱۔) میں اور دو اصلیں (۳، ۲) کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔

۶۔ مساوات

$$لا^۳ + لا^۲ + لا^۳ - لا^۲ - لا^۲ - لا^۲ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔

یہ معلوم ہو جائیگا کہ عمل حساب دو درجہ باقی پر پہنچتے ہی ختم ہو جاسکتا ہے۔
جواب :- صرف ایک اصل حقیقی ہے وقفہ (۲، ۱) میں۔

۷۔ مساوات

$$لا^۳ + لا^۲ - لا^۲ - لا^۲ + لا^۲ = ۱۸۱$$

کا تجزیہ کرو۔

$$ف۲ (لا) = ۸۵۴ - لا - ۲۷۵۱$$

یہاں

$$ف۳ (لا) = ۲۲۱$$

بعض مثالوں میں جیسا کہ اوپر کی مثال سے ظاہر ہے فوراً یہ کہنا آسان نہیں ہوتا کہ ایک تفاعل کی اصل سے اس کے ماقبل تفاعل کی علامت کیا ہو جائیگی۔ ہم نے یہاں ف۲ (لا) کو محسوب کیا اور وہ بہت چھوٹا عدد نکلا حالانکہ ف۳ (لا) کے سروں کی مقدار سے ف۲ (لا) کے لئے اس سے بڑے عدد کی توقع ہوتی تھی۔ واقعہ یہ ہے کہ اگر ہم ف۲ (لا) کی اصل کو ف۳ (لا) میں درج کر دیں تو مثبت حصہ تقریباً منفی حصہ کے مساوی حاصل ہوتا ہے۔ یہ جیسے اس بات کی علامت ہے کہ مجوزہ مساوات کی دو اصلیں تقریباً مساوی ہیں۔ موجود

مثال میں ۳ اور ۴ کے درمیان دو مثبت اصلیں ہیں۔ اس وقفہ کو مزید وقفوں میں تقسیم کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ دونوں اصلیں پھر بھی ۳، ۳، ۳ اور ۳، ۳ کے درمیان واقع ہوتی ہیں اور اس لئے یہ دونوں باہم بہت قریب ہیں۔ حقیقی اور خیالی اصولوں کے درمیان جو تسلسل پایا جاتا ہے اس کی دوسری نمائندگی ہے (دیکھو صفحات ۱۸۶، ۱۸۷)۔ اگر ف۲ (لا) صفر ہوتا تو یہ دونوں اصلیں مساوی ہوتیں اور اگر وہ چھوٹا منفی عدد ہوتا تو یہ اصلیں خیالی ہوتیں۔

۸۔ مساوات

$$۵ + لا^۲ + لا^۳ - لا^۲ + لا^۲ - ۱ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔
عمل سے معلوم ہوتا ہے کہ دو درجہ تفاعل کی اصلیں خیالی ہیں۔
جواب :- ایک حقیقی اصل (۱، ۰) کے درمیان۔ چار خیالی
اصلیں۔

۹۔ مساوات

(209)

$$لا^۶ - لا^۵ - لا^۳ + لا^۲ - ۱ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔

یہاں
اور چونکہ اس کی سب اصلیں خیالی ہیں، عمل حساب یہاں پہنچ کر ختم کیا جاسکتا ہے۔
جواب :- دو حقیقی اصلیں (۱، ۰) (۰، ۱) و تینوں میں واقع ہیں۔

۱۰۔ مساوات

$$لا^۲ - لا^۱۸ + لا^۵ + لا^۶ - لا^۲۰ - لا^۲۰ + لا^۱۸ - ۵ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔

ہیں معلوم ہوگا

$$۱ + لا^۲۰ + لا^۲۰ + لا^۵ = فم (لا)$$

اور عمل حساب یہاں ختم ہو سکتا ہے۔

جواب :- دو حقیقی اصلیں (۱، ۰) (۰، ۱) میں واقع ہیں۔

۱۱۔ امتحان کرو کہ کس طرح مساوات

$$لا^۲ + لا^۱۵ - لا^۸۴ - ۱۹۰ = ۰$$

کی اصلیں، اعداد - ۱۹۰، ۱۵، ۸۴ + ۱ کے درمیان مختلف وقفوں میں
واقع ہوتی ہیں۔

$$فم (لا) = لا^۲ + لا^۵ - لا^۱۲$$

$$فم (لا) = لا^۲۰ + لا^۴۰$$

$$فم (لا) = +$$

مندرجہ بالا مقداروں کے اندراج سے مائل ہوگا

$$+ - + - (\infty -)$$

$$+ - . + (-)$$

$$+ + + + (6)$$

$$+ + + + (\infty +)$$

جب کبھی (جس طرح کہ موجودہ مثال میں) کوئی مقدار امدادی تفاعلوں میں سے ایک تفاعل کو صفر بنا دے (یہاں ف، لا) = ۰ کو۔ یہ پورا کرتا ہے تو صفر جس صف میں ہے اس میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد شمار کرنے میں صفر کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے کیونکہ اسکی ہر جانب کی علامتیں مختلف ہونے کی وجہ سے صف میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد میں کوئی تغیر واقع نہیں ہو سکتا خواہ معدوم ہونیوالی مقدار کی علامت کونسی بھی فرض کر لی جائے۔ سب اصلیں حقیقی ہیں۔ ایک اصل - ۵ اور - ۷ کے درمیان دو اصلیں - ۷ اور ۶ کے درمیان -

۱۲ - مساوات

$$۳ لا - ۶ لا - ۸ لا - ۳ = ۰$$

کا تجزیہ کر دو۔

$$۲ = ف، لا = ۳ لا - ۳ لا$$

یہاں

$$ف، لا = (۱ + لا)$$

چونکہ ف، لا کامل مربع ہے، عمل حساب ختم کیا جاسکتا ہے۔
جواب :- دو حقیقی اصلیں و تینوں (-۱، ۱، ۲) میں واقع ہیں

۹۹ - مساوات کی اصولوں کے حقیقی ہونیکی شرطیں - اسٹرم

(210)

کے تفاعلوں کی تعداد جب اس میں ف (لا) ف (لا) اور ن - ۱ باقیوں کو شامل کیا جائے عام طور پر ن + ۱ ہوگی۔ بعض صورتوں میں مجوزہ مساوات میں چند رقبوں کی عدم موجودگی کی وجہ سے چند باقی

موجود نہیں ہونگے۔ یہ صرف اس وقت واقع ہو سکتا ہے جب مجوزہ مساوات میں خیالی اصلیں ہوں کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ لا کے ∞ سے $\infty + \infty$ تک جانے میں تفاعلوں کے سلسلہ میں علامت کی ∞ تبدیلیوں کا نقصان ہونے کے لئے سب تفاعلوں کا موجود ہونا ضروری ہے۔ اور مزید یہ کہ یہ سب تفاعل ایک ہی علامت اختیار کریں جبکہ لا $\infty + \infty$ اور متبادل علامتیں جبکہ لا $\infty - \infty$ ۔ اب چونکہ مساوات کی پہلی رقم کو ہمیشہ مثبت علامت کے ساتھ لیا جاتا ہے اس لئے کسی مساوات کی سب اصلوں کے حقیقی ہونے کی شرط کو یوں بیان کیا جاسکتا ہے:- ∞ دیں درجہ کی مساوات کی سب اصلیں حقیقی ہونیکے لئے اسٹم کے تمام باقیوں کے صدر سر جو تعداد میں ∞ ۔ ∞ میں مثبت ہونے چاہئیں۔

مثالیں

۱۔ وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات

$$x^2 + 2x + 3 = 0$$

کی اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہوں۔

جواب :- ∞ ۔ ∞ ۔ ∞ ۔

۲۔ وہ شرطیں معلوم کرو کہ کمبی

$$x^2 + 3x + 4 = 0$$

کی سب اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہوں۔

جب اس کمبی کی سب اصلیں حقیقی ہوں تو یہ ظاہر ہے کہ یہ کمبی جس عام کمبی سے اخذ کیا گیا ہے اسکی سب اصلیں بھی حقیقی ہیں۔ اس لئے عام کمبی کی اصلوں کے حقیقی ہونے کی شرطیں معلوم کرنے میں مندرجہ بالا شکل پر بحث کرنا کافی ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ

$$ف (ی) = ی + ۱ھ$$

$$ف (ی) = ۲ھ - ی - گ$$

$$ف (ی) = - (گ + ۲ھ)$$

[انکو محسوب کرنے میں ف (ی) کو ف (ی) سے تقسیم کرنے سے قبل ف (ی) کو مثبت جزو ضربی ۲ھ سے ضرب دو۔]

پس مطلوبہ شرطیں ہیں ۱ھ منفی اور گ + ۲ھ منفی۔

ان کو ایک شرط میں بیان کیا جاسکتا ہے یعنی گ + ۲ھ منفی کیونکہ اس سے ۱ھ کا منفی ہونا لازم آتا ہے (دیکھو دفعہ ۴۳)۔

۳۔ چار درجہ

(211)

$$۱ھ + ۲ھ + ی + گ + ۱ع - ۳ھ =$$

کے لئے اسٹرم کے باقی محسوب کرو۔

ہم معلوم کرتے ہیں

$$ف (ی) = ۳ھ - ی - گ - (۱ع - ۲ھ)$$

$$ف (ی) = - (۲ھ - ۳ع) - ی - گ - ۱ع$$

$$ف (ی) = ۲ع - ۲ھ$$

انکو دفعہ ۳ کی تمانک کی مدد سے آسانی کے ساتھ حاصل کیا جاسکتا ہے

ف کو ف سے تقسیم کرنے سے پیشتر مثبت جزو ضربی ۳ھ سے ضرب دے

اور جب باقی معلوم ہو جائے تو مثبت جزو ضربی ۱ھ کو جدا کر دو۔ ف کو

ف سے تقسیم کرنے سے پیشتر مثبت جزو ضربی (۲ھ - ۳ع) سے ضرب دے

سے ضرب دو اور جب باقی معلوم ہو جائے تو مثبت جزو ضربی ۱ھ کو جدا کر دو۔

۱۰۰۔ چار درجہ کی اصلوں کے حقیقی ہونیکے لئے شرطیں۔

چوتھے درجہ کی عام جبری مسادات کی اصلوں کی نوعیت کو جانچنے کے

معیار اسٹرم کے طریقہ سے حاصل کرنے کے لئے دفعہ سابق کی مثال ۳ کی

مسادات پر غور کرنا کافی ہے۔ اس مثال میں اسٹرم کے باقیوں میں صدر رقبوں کے سروں کی شکلوں کی مدد سے ہم وہ شرطیں حاصل کر سکتے ہیں کہ چار درجہ کی سبب اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہوں۔ چنانچہ ان شرطوں کی شکل یہ ہوگی

۵ منفی ۲۵ ع - ۳۱ جے منفی ۲۵ ع - ۲۵ جے مثبت

ہم دیکھتے ہیں کہ انہیں سے دوسری شرط شکل میں دفعہ ۶۸ کی متناظر شرط سے مختلف ہے۔ ان دونوں شکلوں کو متماثل ثابت کر نیکی کے لئے یہ ثابت کرنا ضروری ہے کہ جب ۵ منفی اور ۵ مثبت ہو تو مزید شرط ۵۲ ع - ۳۱ جے کے منفی ہونے سے یہ بات لازم آتی ہے کہ ۱۲ ع - ۱۲ منفی ہو اور اس کے بالعکس۔ دفعہ ۳۴ کی متماثل سے جو شکل ۵ (۱۲ ع - ۱۲) = ۱۲ (۲۵ ع - ۳۱ جے) میں لکھی گئی ہے یہ امر بالکل واضح ہے کہ جب ۵ اور ۲۵ ع - ۳۱ جے دونوں منفی ہوں تو ۱۲ ع - ۱۲ بالضرور منفی ہے۔ اس کا عکس ثابت کرنے کے لئے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ جب ۱۲ جے مثبت ہوتا ہے تو ۲۵ ع - ۳۱ جے منفی ہے کیونکہ ۵ کے مثبت ہونے کی وجہ سے ۲۵ ع مثبت ہے اور جب ۱۲ جے منفی ہوتا ہے تو پھر بھی ۱۲ ع - ۳۱ جے منفی ہے کیونکہ نامساواتوں ۱۲ ع اور ۲۵ ع کے ۱۲ جے سے فوراً یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ منفی حصہ ۲۵ ع مثبت حصہ ۳۱ جے سے بڑا ہے۔

طالب علم کو اسٹرم کے تفاضلوں کی مدد سے ان بقیہ نتیجوں کی تصدیق کرنے میں کوئی مشکل نہیں ہوگی جو دفعہ ۶۸ کی مختلف صورتوں میں حاصل ہوئے تھے۔

مثالیں

۱۔ مسادات

$$لا - ۱۶ + لا ۶۹ - لا ۷۰ - لا ۴۲ = ۰$$

کی اصولوں کو جدا کرنے میں بودان کا طریقہ استعمال کرو۔

جواب :- اسکی اصلیں وقفوں (-۱)، (۲)، (۳)، (۴)، (۵)، (۶)۔

میں ہیں۔

۲۔ مسادات

$$لا^۱ - لا^۲ + لا^۳ - لا^۴ = ۰$$

کے تجزیہ میں اسٹرم کا مسئلہ استعمال کرو۔

اس قسم کے چار درجہ کا تجزیہ کرنے میں جس کی دو اصلیں صریحاً حقیقی ہیں ہم عمل حساب کو اس وقت ختم کر سکتے ہیں جب اسٹرم کا وہ باقی باقی حال ہو جائے جس کی عدد رقم کا منفی ہے کیونکہ ایسی صورت میں اصولوں کے دوسرے زوج کو خیالی ہونا چاہئے اور حقیقی اصولوں کے مقامات دی ہوئی مسادات میں اندراج کے ذریعہ آسانی کے ساتھ معلوم کئے جا سکتے ہیں۔

جواب :- دو اصلیں خیالی، دو حقیقی اصلیں وقفوں (-۱)، (۲)، (۳) میں

۳۔ اسی طریقہ پر مسادات

$$لا^۱ - لا^۲ + لا^۳ - لا^۴ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔

جواب :- دو اصلیں خیالی، دو حقیقی، (-۱)، (۲)، (۳) وقفوں میں

۴۔ مسادات

$$لا^۱ + لا^۲ - لا^۳ - لا^۴ = ۰$$

کے تجزیہ میں اسٹرم کا مسئلہ استعمال کرو۔

جواب :- سب اصلیں خیالی۔

۵۔ اسٹرم کے طریقہ سے مسادات

$$لا^۱ - لا^۲ + لا^۳ - لا^۴ = ۰$$

کی حقیقی اصولوں کی تعداد اور ان کا محل وقوع دریافت کرو۔

جواب :- سب اصلیں حقیقی۔ ایک اصل وقفہ (-۲)، (۳) میں

دو اصلیں وقفہ (-۱) میں اور دو مثبت اصلیں وقفوں (۱)، (۲)، (۳) میں

۶۔ ذیل کی مساوات کے لئے اسٹرم کے تفاعلوں کو محسوب کرو اور بتاؤ کہ سب اصلیں حقیقی ہیں:-

$$\text{لا} - ۵\text{لا}^۲ + ۵\text{لا}^۳ + ۵\text{لا}^۴ - ۱ = ۰$$

۷۔ ذیل کی مساوات کے لئے اسٹرم کے تفاعلوں کو محسوب کرو اور بتاؤ کہ چار اصلیں خیالی ہیں:-

$$۳\text{لا}^۲ + ۵\text{لا}^۳ + ۲ = ۰$$

طالب علم بہ آسانی دیکھ لگا کہ یہ مثال اور مثال مابقی ایسی مثالیں ہیں جنہیں ایک جزو ضربی ہے جو اسٹرم کے دو غیر متصل باقیوں میں مشترک ہے۔
۸۔ مساوات ذیل کے لئے اسٹرم کے تفاعلوں کو محسوب کرو اور اصلوں کی نوعیت کے متعلق مثال ۳ صفحہ ۱۵۲ کے نتیجوں کی تصدیق کرو:-

$$\text{لا} - ۵\text{ف} + ۵\text{ف}^۲ + ۲\text{ق} = ۰$$

۹۔ ثابت کرو کہ اگر ج کی ایک کے سوا کوئی قیمت ہو تو مساوات

$$\text{ج}^۲\text{لا} - ۲\text{ج}^۲\text{لا}^۲ + ۲\text{لا} - ۱ = ۰$$

کی اصلوں کا ایک زوج خیالی ہے۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$\text{لا} - (\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲ + \text{ج}^۲)\text{لا} - ۲\text{ا}^۲\text{ب} + \text{ج} = ۰$$

کی سب اصلیں حقیقی ہیں۔ اس کو حل کرو جب مقداروں 'ا'، 'ب'، 'ج' میں سے دو مساوی ہو جائیں۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ جب چار درجی

$$\text{ف}(\text{لا}) \equiv \text{لا}^۴ + ۲\text{ب}^۲\text{لا}^۲ + ۶\text{ج}^۲\text{لا} + ۴\text{دلا} + \text{س}$$

کا ایک جزو ضربی تیسرا ہو تو اس کو شکل ذیل میں بیان کیا جاسکتا ہے:-

$$\text{ر}^۲\text{ف}(\text{لا}) \equiv \{\text{لا} + \text{ب} + \text{ا} - ۵\} \{\text{لا} + \text{ب} - ۳ - ۵\}$$

۱۲۔ اسٹرم کے باقیوں کے ذریعہ ان شرطوں کی تصدیق کرو جنکو پورا ہونا چاہئے جبکہ مثال مابقی کا چار درجی کامل مربع ہو اور اس صورت میں ثابت کرو کہ

$$\{ (لا) = (ب + ۳ + ۴) \}$$

۱۳۔ ثابت کرو کہ جب اسٹرم کے سب تفاعل موجود ہوں تو ان تفاعلوں کی صدر رقموں کے سروں میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد مساوات کی خیالی اصلوں کے زوجوں کی تعداد کے مساوی ہوتی ہے۔

۱۴۔ اگر پانچ درجی کے لئے اسٹرم کے باقیوں میں سے پہلے دو کی صدر رقموں کی علامتیں - + ہوں تو ثابت کرو کہ حقیقی اصلوں کی تعداد متعین ہو جاتی ہے۔
جواب :- صرف ایک اصل حقیقی۔

۱۵۔ اگر ھ اور جے دونوں مثبت ہوں تو ثابت کرو کہ چار درجی کی سب اصلیں خیالی ہیں اور یہ کہ انہی شرطوں کے تحت پانچ درجی کی صرف ایک اصل حقیقی ہوتی ہے جب اس کو ثنائی سروں کے ماتحت لکھا جائے۔
(سٹرایم - رابرٹس، ڈیٹن انٹرفیشن پیپر ۱۸۸۲ء)

۱۶۔ اسٹرم کے مسئلہ کے استعمال میں اگر ایسا تفاعل لمبائے جس کی علامتیں سب کی سب مثبت ہیں یا سب کی سب منفی تو ابتدائی مساوات کی مثبت اصلوں کی تعداد اور ان کے محل وقوع کی جانچ اسٹرم کے خچے تفاعلوں کی مدد کے بغیر کی جاسکتی ہے۔ لیکن اگر ایسا تفاعل لمبائے جس کی علامتیں باری باری سے مثبت اور منفی ہیں تو ابتدائی مساوات کی منفی اصلوں کی جانچ بھی اسی طریقہ پر کی جاسکتی ہے۔

۱۷۔ اگر کسی مساوات ف (لا) = کی سب اصلیں حقیقی ہوں تو ثابت کرو کہ اسٹرم کے امدادی تفاعلوں میں سے ہر ایک تفاعل کی سب اصلیں بھی حقیقی ہیں اس کو اسی طرح کے استدلال سے ثابت کیا جاسکتا ہے جو دفعہ ۹۶ میں

استعمال کیا گیا ہے۔ ک وہی باقی سلسلے پر غور کرو اور فرض کرو کہ اس کا درجہ م ہے۔ کیا اور وہ م تفاعل جو اسکے بعد آتے ہیں ایک ایسا سلسلہ بناتے ہیں جس میں کوئی دو متصل تفاعل باہم معدوم نہیں ہو سکتے۔ جب لا = -∞ تو انہی علامتیں

باری باری سے مثبت اور منفی ہیں لیکن جب 'لا' $= +$ تو یہ سب مثبت ہیں۔
اس لئے 'لا' جب '۔' $= -$ سے $+ =$ تک جاتا ہے تو علامت کی م تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں اور یہ ظاہر ہے کہ علامت کی کوئی تبدیلی کم نہیں ہو سکتی
سوائے اس صورت کے جبکہ 'لا' مساوات $=$ کی ایک اہل میں سے
گذرے۔ پس اس مساوات کی م حقیقی اصلیں ہیں۔

اب چونکہ 'لا' کی وہ قیمت جو کسی تفاعل کو معدوم کرتی ہو وہ متصلہ
تفاعلوں کو مختلف علامت بناتی ہے اسلئے آسانی کے ساتھ نتیجہ نکلے گا
ہے کہ سلسلہ کی کوئی مساوات بلحاظ اس تفاعل کے جو اس کے پیشتر ہے انتہائی
مساوات ہے۔

(214)

۸۔ اگر اسٹرم کے امدادی تفاعلوں میں سے کسی ایک تفاعل
ف م (لا) کی حقیقی اصلیں معلوم ہوں تو ثابت کر دو کہ ابتدائی مساوات کی
اصولوں کی تعداد اور محل وقوع ف م (لا) کے نیچے دیگر تفاعلوں کی امداد
کے بغیر متعین ہو سکتے ہیں۔

فرض کر دو کہ ف م (لا) $=$ کی حقیقی اصلیں مقدار کی ترتیب میں
عہ، ب،، ی، ط ہیں اور بقیہ اصلیں خیالی ہیں۔ لاجب $=$ سے
ط سے کسی قدر چھوٹی قیمت تک بدلتا ہے تو تفاعل ف م (لا) اپنی
علامت نہیں بدلتا اور اس لئے ف (لا) $=$ کی اصولوں کی جانچ کر نہیں
جوان حدود کے درمیان واقع ہوں ف م (لا) کے بعد آئے والے
اسٹرم کے تفاعلوں کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ یہی بات اس وقت صادق
آتی ہے جبکہ 'لا' ط سے ذرا بڑی قیمت سے لیکر یہ سے ذرا چھوٹی قیمت
گزر رہا ہے۔ اور اسی طرح دوسرے وقفوں کے لئے بھی۔ پس اگر ہم وقفوں
(۔' $=$ ط) (ط' $=$ ی) (ب' $=$ عہ) کی الگ الگ جانچ کریں تو ابتدائی
مساوات کی اصولوں کی تعداد جوان میں سے ہر ایک میں واقع ہوتی ہے
اسٹرم کے نیچے کے تفاعلوں کی مدد کے بغیر متعین کیجا سکتی ہے۔

۹۔ اگر اسٹرم کے امدادی تفاعلوں میں سے کسی ایک میں خیالی

اصلیں ہوں تو ابتدائی مساوات میں کم از کم اتنی ہی تعداد خیالی اصولوں کی ہوگی
(مسٹر ایف۔ پریمر)
اس کو مثال مابقی سے اس طرح اخذ کیا جاسکتا ہے کہ علامت کی
تبدیلیوں کی بڑی سے بڑی تعداد کا انتخاب کیا جائے جو ف (لا) پر ختم
ہوئیو اے تقاضوں کے سلسلہ میں کم ہو جاتی ہیں جبکہ لا، -، + سے
تک بدلتا ہے۔ یہ یاد رہے کہ جہاں تک اس محدود سلسلہ کا تعلق ہے لا کے
ف (لا) = ۰ کی ہر اصل میں سے گزرنے پر علامت کی ایک تبدیلی کا
اضافہ ہو سکتا ہے۔

۲۰۔ مثال ۱۸ کا طریقہ دفعہ ۹۸ مثال ۱ میں استعمال کرو۔
آخری دو اسٹرم کے تقاضوں کو نظر انداز کرنے سے

$$ف (لا) \equiv لا^۳ + لا^۲ + لا + ۱۰ + لا + ۱$$

$$ف (لا) \equiv لا^۴ + لا^۳ + لا^۲ + لا + ۱۰ + لا + ۱$$

$$کا \equiv -۲۹ لا^۲ - ۸ لا + ۱۴$$

یہ آسانی سے معلوم ہو جاتا ہے کہ کا = کی اصلیں و تقفوں

(۳-۲) اور (۱۰) میں واقع ہوتی ہیں۔ مساوات ف (لا) = میں
دو اصلیں خیالی ہیں کیونکہ کا میں لا کا سرمنفی ہے۔ حقیقی اصلیں اگر کوئی
ہوں منفی ہوتی چاہئیں۔ مندرجہ بالا تین تقاضوں کو تقفوں (۳-۲) اور
(۲-۱) میں اصولوں کے وجود اور محل وقوع کو متعین کرنے کے لئے کافی ہیں۔ یہ
فوراً معلوم ہو جاتا ہے کہ ابتدائی مساوات کی دو حقیقی اصلیں موخر اندازہ دفعہ
میں واقع ہوتی ہیں۔

بہت سی مثالوں میں اسٹرم کے آخری دو تقاضوں کو اس طور پر
نظر انداز کرنا ممکن ہوگا۔ ہم دیکھتے ہیں کہ دو درجہ تقاضوں کی اصولوں کو ٹھیک
طور پر معلوم کرنا ضروری نہیں ہے بلکہ صرف وہ وقفے دریافت کر لئے جائیں
جس میں وہ واقع ہوتی ہیں۔

گیارہواں باب

عددی مساواتوں کا حل

۱۰۱۔ جبری اور عددی مساواتیں۔ جبری اور عددی مساواتوں کے حل میں ایک اصولی فرق ہے۔ قبل الذکر میں نتیجہ کو خالص حریفی نوعیت کے عام ضابطہ سے بیان کیا جاتا ہے۔ یہ چونکہ ایک اصل کے لئے عام جملہ ہوتا ہے اس لئے بلا امتیاز تمام اصولوں کو تعبیر کرتا ہے۔ اس جملہ کو ایسا ہونا چاہئے کہ اس میں سروں کے جو تفاضل شامل ہوتے ہیں انکی بجائے اصولوں کے متناظر متشاكل تفاضلوں کو درج کیا جائے تو جذری علامات ۱، ۲، ۳ سے تعبیر ہوئیوالے اعمال قابل عمل ہو جائیں اور جب ان متشاكل تفاضلوں کے جذر الکعب اور جذر المربع نکالے جائیں تو اصولوں کا یہ جملہ ایک اصل میں تحویل ہو جائے، مختلف اصلیں جذر المربعوں ۱، ۲، ۳ اور جذر الکعبوں ۱، ۲، ۳ سے حاصل ہونگی۔ اس بیان کی سادہ مثال دفعہ ۵۵ میں دو درجی کے لئے ملیگی۔ دفعات ۵۹ اور ۶۶ میں کعبی اور چار درجی کے لئے اسی قسم کی مثالیں درج ہیں۔ یہ بھی یاد رہے کہ وہ ضابطہ جو جبری مساوات کی اصل کو تعبیر کرتا ہے اسوقت بھی درست رہتا ہے جب مساوات کے سرخیالی مقادیر ہیں۔

عددی مساداتوں کی صورت میں اصولوں کو ایسے طریقوں سے جو ابھی بیان کئے جائینگے فرداً فرداً معلوم کیا جاتا ہے۔ کسی ایک اصل کو تقریبی طور پر معلوم کرنے سے پیشتر عموماً یہ ضروری ہے کہ وہ ایک معلومہ وقفہ میں واقع ہونی چاہئے جس میں کوئی دوسری حقیقی اصل شامل نہ ہو۔
عددی مساداتوں کی حقیقی اصلیں یا تو متوافق ہو سکتی ہیں یا متباہین پہلی جماعت میں اعداد صحیح کسرات اور ختم یا متوالی اعشاریہ جو کسرات میں تحویل ہو سکتی ہیں شامل ہیں۔ دوسری جماعت غیر ختم اعشاریہ پر مشتمل ہے۔ پہلی جماعت کی اصلیں ٹھیک ٹھیک معلوم ہو سکتی ہیں اور دوسری جماعت کی اصولوں کو صحت کے کسی درجہ تک تقریباً معلوم کیا جاسکتا ہے۔

(216)

اب ہم ایک ایسے مسئلہ سے ابتدا کریں گے جو پہلی جماعت کی اصولوں کی تعین کو ایسی اصولوں کی تعین میں تحویل کر دیتا ہے جو صرف صحیح عدد ہیں۔

۱۰۲۔ مسئلہ۔ جس مسادات میں پہلی رقم کا سر ایک ہو اور دوسری رقموں کے سر صحیح اعداد ہوں اس میں کوئی ایسی متوافق اصل نہیں ہو سکتی جو صحیح عدد نہیں ہے۔
کیونکہ اگر ایسا ممکن ہو تو فرض کرو کہ مسادات

$$لا + ب م لا^۱ + ب م لا^۲ + \dots + ب م لا^۱ + ب م لا^۲ = ۰$$

کی ایک اصل $\frac{1}{b}$ ہے جو مختصر ترین شکل میں ایک کسر ہے۔ تب

$$\left(\frac{1}{b}\right) + ب م \left(\frac{1}{b}\right)^۱ + \dots + ب م \left(\frac{1}{b}\right)^۱ + ب م \left(\frac{1}{b}\right)^۲ = ۰$$

اس کو ب^{۱-۵} سے ضرب دو تو

$$- \frac{1}{b} = b^1 + b^2 + \dots + b^{n-1} + b^n + b^{n+1} + \dots + b^{2n-1} + b^{2n}$$

اب یہ ظاہر ہے کہ $\frac{1}{b}$ سے تقسیم نہیں ہوتا اور مساوات کی بائیں جانب کی ہر رقم ایک صحیح عدد ہے یعنی مختصر ترین شکل کی ایک کسر ایک صحیح عدد کے مساوی ہے جو ناممکن ہے۔ پس مساوات کی اصل $\frac{1}{b}$ نہیں ہو سکتی۔ اس لئے اسکی حقیقی اصلیں یا تو صحیح اعداد ہیں یا متباہین مقداہیں۔

ہر وہ مساوات جس کے سر محدود، کسیری یا صحیح عدد ہوں، ایسی شکل میں تحویل کیجا سکتی ہے جس میں پہلی رقم کا سر ایک اور دوسری ارقام کے سر صحیح عدد ہوں (دیکھو دفعہ ۳۱) پس معمولی استحالیہ کی مدد سے متوافق اصولوں کی تعیین بالعموم صحیح عددی اصولوں کی تعیین میں تحویل کیجا سکتی ہے۔ اب ہم نیوٹن کا وہ طریقہ عمل بیان کریں گے جس سے کسی مساوات کی صحیح عددی اصلیں حاصل ہوتی ہیں جبکہ اس مساوات کے سر سب سب صحیح عدد ہوں۔ اس طریقہ کو مقسوم علیہم کا طریقہ کہتے ہیں۔

۱۰۳۔ نیوٹن کا مقسوم علیہم کا طریقہ۔ فرض کرو کہ مساوات

$$x^2 + x + 1 = 0 \quad (1)$$

کی ایک صحیح اصل h ہے۔ اس کثیرالارقام کو h سے تقسیم کریں گے بعد فرض کرو کہ خارج قسمت

$$x^2 + x + 1 = h(x^2 + x + 1) + r$$

نہیں ہے۔

اب ہم عدد ۳ کے ساتھ عمل کرتے ہیں:-

$$۱ \quad ۲ - \quad ۱۳ - \quad ۳۸ - \quad ۲۲ -$$

$$\frac{۱-}{۲-} \quad \frac{۱-}{۳-} \quad \frac{۱۰-}{۳-} \quad \frac{۸-}{۳۰-}$$

پس ۳ ایک اصل ہے۔ ۲ کے ساتھ عمل کرنے میں جیسا کہ اوپر بتایا گیا، ہم دوسری سطر کے سروں سے انکی علامتیں بد لکر فائدہ اٹھاتے ہیں:-

$$۱ \quad ۱ \quad ۱۰ - \quad ۸$$

$$\frac{۱-}{۰-} \quad \frac{۳-}{۲-} \quad \frac{۴-}{۶-}$$

پس ۲ بھی ایک اصل ہے۔ پھر ۲ کے ساتھ عمل کرنے سے

$$۱ \quad ۳ \quad ۴ -$$

$$\frac{۲}{۵}$$

عمل ۵ پر رک جاتا ہے کیونکہ یہ ۲ سے تقسیم نہیں ہوتا۔ پس ۲ اصل نہیں ہے۔

۳ بھی اصل نہیں ہے کیونکہ یہ ۴ کو تقسیم نہیں کرتا۔

[ہم ۳ کو پہلے ہی خارج کر سکتے تھے کیونکہ وہ تقوّل شدہ کثیر لا مقام کی مطلق رقم کو تقسیم نہیں کرتا۔ اس بات کو پیش نظر رکھنے سے مقسوم علیہم کی تعداد گھٹانے میں اکثر فائدہ ہوتا ہے]

اب ہم آخری مقسوم علیہ ۴ کو لیتے ہیں:-

$$۱ \quad ۳ \quad ۴ -$$

$$\frac{۱-}{۰-} \quad \frac{۱}{۴}$$

پس ۴ بھی اصل ہے۔

اس لئے مساوات کی صحیح اصلیں ہیں ۳، ۲، ۴ اور عمل کی آخری

منزل سے یہ ظاہر ہے کہ جب ابتدائی کثیرالارتقام کو ثنائی جملوں لا - ۳، لا - ۲ سے تقسیم کیا جاتا ہے تو نتیجہ لا - ۱ حاصل ہوتا ہے اور اس لئے ایک بھی ایک اصل ہے۔ پس ابتدائی کثیرالارتقام کو شکل
(لا - ۱)(لا - ۲)(لا - ۳)(لا + ۴)
میں رکھا جاسکتا ہے۔

۲- مساوات ۳ لا^۴ - ۲ لا^۳ + ۳ لا^۲ + ۳ لا - ۳۰ = ۰
کی صحیح اصلیں معلوم کرو۔

اسکی اصلیں ۲ اور ۸ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔ پس صرف
مقسوم علیہم ۲، ۳، ۵، ۶ کو آزمانا ہوگا۔
ہم فوراً معلوم کر لیتے ہیں کہ ۶ اصل نہیں ہے۔
۵ کے لئے ہم حاصل کرتے ہیں

$$۳۰ - ۳۱ - ۳۵ - ۲۳ - ۳$$

$$\frac{۲-}{۱۵} = \frac{۸-}{۳۰} = \frac{۵-}{۲۵} = \frac{۶-}{۲۵}$$

پس ایک اصل ۵ ہے۔ ۳ کے لئے ہم معلوم کرتے ہیں

$$۶ - ۵ - ۸ - ۳$$

$$\frac{۲-}{۳} = \frac{۱-}{۹} = \frac{۲-}{۳}$$

اس لئے ۳ بھی ایک اصل ہے۔ ہم آسانی کے ساتھ یہ معلوم کر لیتے ہیں کہ
۲ اصل نہیں ہے۔

ابتدائی کثیرالارتقام کو (لا - ۵)(لا - ۳) سے تقسیم کیا جائے تو خارج
قسمت آخری عمل کی رو سے ہے

$$۳ لا^۲ + لا - ۲$$

جبکی ایک اصل - ۱ ہے۔ پس مجوزہ مساوات کی تمام صحیح اصلیں
- ۱، ۳، ۵، ہیں۔

تفصیل کے ساتھ استعمال کرنے سے پیشتر ان مقسوم علیہم کی تعداد کو گھٹانا ضروری ہے جنکو آزمائے کی ضرورت ہے۔ اس کو حسب ذیل طریقہ سے عمل میں لایا جاسکتا ہے:-

اگر ف (لا) = کی ایک صحیح اصل ہے تو جیسا کہ اوپر بتایا گیا ف (لا) لا۔ ہ سے پورا تقسیم ہو جاتا ہے اور خارج قسمت کے سر صحیح اعداد ملتے ہیں۔ اس لئے اگر ہم لا کو کوئی صحیح عددی قیمت دیں اور ف (لا) کی متناظر قیمت کو لا۔ ہ کی متناظر قیمت سے تقسیم کریں تو خارج قسمت ایک صحیح عدد ہونا چاہئے۔ سہولت کی خاطر ہم سادہ ترین صحیح اعداد ۱ اور ۱ لیتے ہیں اور کسی مقسوم علیہ کو آزمائے سے پیشتر ہم اس پر یہ شرط عائد کر دیتے ہیں کہ ف (لا) لا۔ ہ سے تقسیم ہو جائے (یا علامت کو بدل دینے سے) اور ف (لا) لا۔ ہ سے تقسیم پذیر ہو جائے (یا علامت کو بدل دینے سے) لا۔ ہ سے۔

اس نتیجہ کو استعمال کرتے وقت سب سے پہلے ف (لا) اور ف (لا) کو منسوب کرنے میں سہولت ہوگی۔ اگر ان میں سے کوئی ایک معدوم ہو جائے تو متناظر صحیح عدد ایک اصل ہے اور پھر اس تجل شدہ کثیر الارقام پر عمل جاری کرینگے جس کے سر اس نتیجہ کو معلوم کرنے کے عمل میں حاصل ہوتے ہیں جو زیر بحث صحیح عدد کو درج کرنے سے ملتا ہے۔

مثالیں

- ۱۔ لا ۲۳ + لا ۶۰ - لا ۲۸۱ - لا ۲۵۰ - لا ۴۴۰ =
- اصلیں ۱ اور ۲۴ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔
- حسب ذیل مقسوم علیہم حاصل ہوتے ہیں:-

۲۲، ۲۰، ۱۱، ۱۰، ۸، ۵، ۴، ۲

ہم آسانی کے ساتھ حاصل کر لیتے ہیں

(228)

کثیر الارقام کی اصل بھی ہو تو وہ مجوزہ مساوات کی تہری اصل ہے اور علیٰ ہذا لفظ
جب کبھی کسی مساوات میں مرتبہ تکرار یا نیوالی صرف ایک ضغفی اصل
ہو تو اس کو اس طریقہ پر معلوم کیا جاسکتا ہے کیونکہ ایسی صورت میں
ف (لا) اور ف (لا) کا مقسوم علیہ اعظم (لا - عہ) کی شکل کا ہوگا
اور اگر عہ متباین ہو تو اس کے سر متوافق نہیں ہو سکتے۔
تیسرے، چوتھے اور پانچویں درجوں کی مساواتوں کی ضغفی اصلیں
مقسوم علیہ اعظم معلوم کرنے کے عمل کی مدد کی بغیر پوری طرح معلوم
کیا جاسکتی ہیں جیسا کہ ذیل کے مشاہدات سے واضح ہو جائیگا۔
(۱) یعنی۔ اس صورت میں ضغفی اصلوں کو متوافق ہونا چاہئے
کیونکہ اسکا درجہ اتنا بڑا نہیں ہے کہ دو جدا جدا اصلیں تکرار یا سکیں۔
(۲) چار درجی۔ اس صورت میں یا تو ضغفی اصلیں متوافق ہیں
یا یہ تفاعل ایک کامل مربع ہے۔ کیونکہ چار درجی کی وہ شکل جس میں
دو جدا جدا اصلیں تکرار یا سکتی ہیں صرف یہ ہے۔
(لا - عہ) (لا - بہ)
یعنی ایک دو درجی کا مربع۔ چار درجی کی اصلیں متباین ہو سکتی ہیں۔
اسلئے اگر یہ معلوم ہو جائے کہ چار درجی کی اصلیں متوافق نہیں ہیں تو ہمیں
یہ دیکھ لینا چاہئے کہ آیا وہ کامل مربع ہے تاکہ مساوی متباین اصلوں کا
تفہین ہو سکے۔
(۳) پانچ درجی۔ اس صورت میں یا تو ضغفی اصلیں متوافق ہیں
یا یہ تفاعل دو جملوں کا حاصل ضرب ہے، ایک خطی متوافق جزو
ضربی اور دوسرا ایک دو درجی کا مربع۔ کیونکہ دو مختلف اصلوں کے تکرار
پاسکنے کے لئے تفاعل کو شکلوں
(لا - عہ) (لا - بہ) (لا - جہ) (لا - عہ) (لا - بہ)
میں سے کوئی نہ کوئی شکل اختیار کرنی چاہئے۔ موزر الذکر شکل میں اصلیں
متباین نہیں ہو سکتیں۔ لیکن قبل الذکر ایسی صورت کا جواب ہو سکتی ہے

جس میں ایک متوافق جزو ضربی ایک دو درجی کے مربع سے مضروب ہو
جسکی اصلیں متباین ہیں۔ اس طرح اگر یا صحیح درجی میں متوافق اصلوں کا
غیر موجود ہونا معلوم ہو جائے تو اسکی اصلیں ضعیفی نہیں ہو سکتیں۔ اگر
اس میں صرف ایک متوافق اصل پائی جائے تو اس بات کا امتحان
کر لینا چاہئے کہ آیا باقی ماندہ جزو ضربی کا حل صحیح ہے۔ اگر اس میں ایک سے
زیادہ متوافق اصلیں ہوں تو ضعیفی اصلیں متوافق اصلوں میں ملینگی۔

مثالیں

(224)

$$1 - 2 \text{ لا} - 3 \text{ لا} 2 - 4 \text{ لا} 112 + 62 = 0$$

کی تمام متوافق اصلیں معلوم کرو۔

اصلیں حدود - ۱۶ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔ مقسوم علیہم ۲، ۴، ۸

ہیں۔

$$2 \quad 31 - 112 \quad 62$$

$$\frac{2 -}{0} \quad \frac{15 -}{16 -} \quad \frac{8 -}{120 -}$$

اسلئے ۸ ایک اصل ہے۔ اب تحویل شدہ مساوات پر عمل کرو

$$2 \quad 15 - 8 -$$

$$\frac{2 -}{0} \quad \frac{1 -}{16 -}$$

۸ پھر ایک اصل ہے اور باقی ماندہ جزو ۲ لا + ۱ ہے۔

جواب :- ف (لا) $\equiv (۱ + لا) (۸ - لا)$

$$2 - 2 \text{ لا} - 30 \text{ لا} 2 - 6 \text{ لا} - 56 = 0$$

کی متوافق اور ضعیفی اصلیں معلوم کرو۔

اصلیں حدود - ۱۶ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔ (دفعہ ۸ مثال ۱)

کا طریقہ استعمال کرو)

جواب :- ف (لا) \equiv (لا + لا) (لا - لا) (لا - لا)

$$= 14 + 0.4 - 0.21 - 0.12 - 0.9 \quad \dots 3$$

کی متوافق اور ضعفی اصلیں دریافت کرو۔

اصلیں حدود ۵۴ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔

مساوات جس شکل میں ہے اس میں صحیح اصلیں نہیں ہیں۔ لیکن پھر بھی

اسکی اصل متوافق ہو سکتی ہے۔ اس کو جاننے کے لئے اسلوں کو ۳۰ سے

ضرب دو تاکہ لا کا سیر ایک ہو جائے۔ تب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \cdot 2$$

اب اصلیں حدود - ۶، ۱۵ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔

اسکی ایک دوہری اصل - ۴ ہے اور تغافل (۱۲-۱۱+۹) (۱۱+۱۲) ۲

کے معادل ہے۔ اس لئے ابتدائی مساوات

$$= (r + \sqrt{r})(1 + \sqrt{r} - \sqrt{r})$$

کے مماثل ہے۔

$$= r + U_1 r - U_2 r + U_3 r + U_4 r = r$$

کی متوافق اور ضعیفی اصلیں معلوم کرو۔

اصلیں - ۱۲ اور اس کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔ اس لئے قابل امتحان (235)

مقسوم علیہم صرف - ۴ - ۲ - ۱ ہیں۔ ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ مساوات کی

کوئی اصل متوافق نہیں ہے۔ اب ہم یہ دیکھتے ہیں کہ آیا دیا ہوا اتفاعل کامل مربع ہے۔

تفاعل کا حذر المربع نکالنے سے مامثال ۳ صفحہ ۳۰ کی شرطوں کو استعمال کرنے سے

یہ معلوم ہو سکتا ہے۔ خانجہ بہ $116 + 2 = 2$ کا مربع ہے (مثال صفحہ ۲۲)

یہ معلوم ہو سکتا ہے۔ چنانچہ یہ $9 + 9 - 9 = 9$ (مثال اسی طرح)

پس دی

٥- ف(لا) = لا - لا^٢ + لا^٣ - لا^٤ + لا^٥ - لا^٦ + لا^٧ - لا^٨ + لا^٩ - لا^{١٠} + لا^{١١} - لا^{١٢}.

کی متوافق اور ضعیفی اصلیں معلوم کرو۔

اصولوں کے حدود - م، م، م ہیں۔

مساوات کی ایک اصل - ۳ ہے اور تحویل شدہ مساوات ہے

لا - ۲ لا + ۸ لا + ۲ = ۲ - ۲
اور کوئی دوسری متوافق اصل موجود نہیں ہے۔ اسلئے ضعیفی اصلوں کا امکان صرف اس صورت میں ہے جبکہ یہ بعد کا تعادل کامل مرتب ہو۔ چنانچہ یہ معلوم ہو جاتا ہے کہ وہ کامل مرتب ہے اور

$$ف (لا) \equiv (لا - ۲ - لا - ۲) (۲ + لا - ۳)$$

$$۶ - ف (لا) \equiv لا - ۸ لا + ۲ لا - ۲ لا + ۲ لا - ۲ لا - ۱۸ = ۰$$

کی متوافق اور ضعیفی اصلیں معلوم کرو۔

$$جواب :- ف (لا) \equiv (لا + ۱) (لا - ۲) (لا - ۳)$$

۷ - ذیل کی مساوات میں صرف دو مختلف اصلیں ہیں۔ انکو معلوم کرو۔

$$لا - ۱۳ لا + ۶ لا - ۱۱ لا + ۲ لا - ۱۰۸ = ۰$$

عموماً یہ ظاہر ہے کہ اگر ایک صحیح اصل ۷ دو مرتبہ واقع ہوتی ہو تو آخری سر میں ۲ جزو ضربی کے طور پر شامل ہونا چاہئے اور آخر سے دوسرے سر میں ۷۔ اگر اصل تین مرتبہ واقع ہوتی ہو تو آخری سر میں ۳، ۲، ۱ آخر سے دوسرے سر میں ۷، ۲، ۱ اور آخر سے تیسرے سر میں ۷ جزو ضربی کے طور پر شامل ہونا چاہئے۔ یہاں آخری سر = ۲ × ۳ - پس اگر نہ تو ۱ اور نہ ۱ اصل ہو تو اصلیں ۲ اور ۳ ہونی چاہئیں۔ اسکی تصدیق آسانی کے ساتھ ہو سکتی ہے کہ یہ دونوں فی الحقیقت اصلیں ہیں۔

۸ - مساوات

$$لا - ۸۰۰ لا - ۱۰۲ لا - لا + ۳ = ۰$$

میں مساوی اصلیں ہیں ان کو معلوم کرو۔

اس مثال میں مقسوم علیہم کا طریقہ استعمال کرنے سے پیشتر اصلوں کو ان کے شکافیوں میں تبدیل کرنے سے آسانی پیدا ہوگی۔

$$جواب :- ف (لا) \equiv (لا - ۱۰۰) (لا - ۵) (لا - ۱)$$

۱۰۷۔ نیوٹن کا تقرب کا طریقہ۔ یہ بتا دینے کے بعد کہ مساواتوں کی

متوافق اصلیں کس طرح معلوم کی جاسکتی ہیں اب ہم متباین اصولوں کی تقریبی قیمتیں حاصل کرنے کے بعض طریقے بیان کرتے ہیں۔ تقرب کا وہ طریقہ جو عام طور پر نیوٹن سے منسوب کیا جاتا ہے اور جو اس دفعہ کا موضوع ہے اس لحاظ سے قابل قدر ہے کہ اس کو باورانی تفاضلوں پر مشتمل عددی مساواتوں میں اور ان مساواتوں میں جنہیں صرف جبری تفاضل شامل ہوتے ہیں یکساں طور پر استعمال کیا جاسکتا ہے۔ اگرچہ موخر الذکر جماعت کے تفاضلوں کی صورت میں عملی مقاصد کے مد نظر ہارنر کے طریقہ کو نیوٹن کے طریقہ پر ترجیح حاصل ہے تاہم اصول میں دونوں طریقے بڑی حد تک مماثل ہیں۔ ہارنر کا طریقہ جس کا حوالہ اوپر دیا گیا ہے دفعتاً آئندہ میں واضح کیا جائیگا۔

تقرب کے تمام طریقوں میں جس اصل کو ہم تلاش کرتے ہیں اسکی متعلق یہ فرض کر لیا جاتا ہے کہ وہ دوسری اصولوں سے جدا کر لی گئی ہے اور تنگ حدود کے درمیان معلومہ وقفہ کے اندر واقع ہے۔

فرض کرو کہ دی ہوئی مساوات $f(x) = 0$ ہے اور قیمت x معلوم ہے جو مساوات کی ایک اصل سے بقدر ایک چھوٹی مقدار h کے فرق رکھتی ہے۔ اب چونکہ مساوات کی اصل $x + h$ ہے اسلئے $f(x + h) = 0$ یعنی

$$f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \dots = 0$$

اب چونکہ h چھوٹا ہے اسلئے h کی ایک سے بڑی تمام قوتوں کو نظر انداز کر دینے سے ہم حاصل کرتے ہیں

۱۰ دیکھو نوٹ (ب) کتاب کے آخری حصہ میں۔

$$ف(۱) + ف(۱) = ۵$$

جس سے

$$۵ = \frac{ف(۱)}{ف(۱)}$$

یعنی مطلوبہ اصل کی پہلی تقریبی قیمت ہے

$$۱ - \frac{ف(۱)}{ف(۱)}$$

اس قیمت کو ب سے تعبیر کرو اور پھر وہی عمل جاری کرو تو قریب تر تقریبی قیمت

$$ب - \frac{ف(ب)}{ف(ب)}$$

حاصل ہوگی۔ اس عمل کو دہرانے سے صحت کے کسی درجہ تک تقریبی قیمت معلوم کیا جاسکتی ہے۔

مثال

$$۰ = ۵ - ۱۱۲ - ۳$$

مساوات کی مثبت اصل کی تقریبی قیمت معلوم کرو۔

اصل ۱۱۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہے (مثال ۱ دفعہ ۹۶)۔ حدود کو تنگ کرنے سے اصل کا ۲ اور ۲۵۲ کے درمیان واقع ہونا معلوم ہوتا ہے۔ ہم ۲۵۱ کو وہ مقدار لیتے ہیں جو ۱ سے تعبیر کی جاتی ہے۔ یہ مقدار اصلی قیمت ۱ + ۵ سے ۱۱۲ سے زیادہ فرق نہیں رکھ سکتی۔ آسانی کے ساتھ ہم معلوم کرتے ہیں

$$\frac{ف(۱)}{ف(۱)} = \frac{ف(۲۵۱)}{ف(۲۵۱)} = \frac{۵۰۶۱}{۱۱۵۲۳} = ۰.۴۴۳۵$$

(227)

اسلئے پہلا تقرب ہے

$$۲۶۰۹۴۶ = ۰.۰۰۵۴۳ - ۲۶۱$$

اسکو ب قرار دینے سے اگر کسر $\frac{ف(ب)}{ب}$ کو محسوب کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$ب - \frac{ف(ب)}{ب} = ۲۶۰۹۴۵۵۱۴۸ = \frac{ف(ب)}{ب}$$

جو دوسرا تقرب ہے۔ دقتس علیٰ ہذا۔

نیوٹن کے طریقہ میں عام طور پر تقرب کی رفتار بہت تیز ہوتی ہے لیکن جس اصل کو ہم تلاش کر رہے ہیں اس کے ساتھ ہی جب دوسری اصل تقریباً اسلئے مساوی ہوتی ہے تو کسر $\frac{ف(ب)}{ب}$ کا چھوٹا ہونا ضروری نہیں کیونکہ تقریباً مساوی اصلوں میں سے کسی ایک کی قیمت 'ف' (لا) کو ایک چھوٹی مقدار میں تبدیل کر دیتی ہے۔ ایسی صورت میں خاص خاص پیش بینیوں کی ضرورت پڑتی ہے اس طریقہ کی تفصیلی بحث میں ہم پڑنا نہیں چاہتے اس وجہ سے کہ عملی مقاصد کے لئے ہارنر کا طریقہ کہیں زیادہ مفید و کارآمد ہے جو اب بیان کیا جائیگا۔

۱۰۸۔ عددی مساواتوں کو حل کرنے کے لئے ہارنر کا طریقہ۔

اس طریقہ سے متوافق اور متباین دونوں اصلیں معلوم ہو سکتی ہیں۔ اس میں اصل کو ہندسہ بہ ہندسہ دریافت کیا جاتا ہے، پہلے اصل کا صحیح حصہ (اگر کوئی ہو) اور پھر اعشاری حصہ حاصل کرتے ہیں یہاں تک کہ اصل اگر متوافق ہو تو پوری طرح اور اگر متباین ہو تو اعشاریہ کے مطلوبہ مقامات تک معلوم ہو جائے۔ یہ عمل جذر المربع اور جذر الکعب نکالنے کے عمل کے متشابه ہے جو فی الحقیقت موجودہ طریقہ سے دو درجہ اور کعبی مساواتوں کے عام حل معلوم کرنے کی خاص صورتیں ہیں۔

ہارنر کے طریقہ کا خاص اصول یہ ہے کہ دی ہوئی مساوات کی

اصولوں کو دفعہ ۳۳ میں بیان کردہ طریقہ کی بموجب بقدر معلومہ مقدار و محکم متواتر رکھایا جاتا ہے۔ اس طریقہ کا بڑا فائدہ یہ ہے کہ متواتر استحالات مختصر حسابی شکل میں پیش نظر ہو جاتے ہیں اور اصل ایک مسلسل عمل سے اعشاریہ کے مطلوبہ مقامات تک صحیح صحیح حاصل ہو جاتی ہے۔

اصولوں کو گھٹانے کا اصول اس دفعہ میں سادہ مثالوں کے ذریعہ واضح کیا جائیگا اور دفعات آئندہ میں چند اور اصول بیان کئے جائینگے جنکی مدد سے اس طریقہ کے عملی استعمال میں بہت کچھ سہولت پیدا ہو سکتی ہے۔

(228)

مثالیں

۱۔ مساوات

$$۲ لا - ۸۵ لا - ۸۴ = ۰$$

کی مثبت اصلیں معلوم کر دو۔

جب کوئی عددی مساوات حل کرنے کے لئے تجویز ہو تو پہلا کام یہ ہوگا کہ اصل کا پہلا عدد معلوم کیا جائے۔ چند آزمائشوں سے یہ عدد معلوم ہو سکتا ہے اگرچہ بعض صورتوں میں اصولوں کو جدا کرنے کے وہ طریقے استعمال کرنے ہونگے جو دسویں باب میں بیان کئے گئے ہیں۔ مثال بالا میں صرف ایک اصل مثبت ہو سکتی ہے اور یہ ۴۰ اور ۵۰ کے درمیان واقع ہے۔ پس اصل کا پہلا عدد ۴۰ ہے۔ اب ہم اصولوں کو بقدر ۴۰ کے گھٹاتے ہیں۔ احتمال شدہ مساوات کی ایک اصل صفر اور ۱۰ کے درمیان ہوگی۔ امتحان کرنے سے اس کا ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہونا معلوم ہوتا ہے۔ اب ہم احتمال شدہ مساوات کی اصولوں کو بقدر ۳ کے گھٹاتے ہیں جس کا اثر یہ ہوگا کہ مجوزہ مساوات کی اصلیں بقدر ۴۳ کے گھٹ جائیں گی۔ دوسری احتمال شدہ مساوات کی ایک اصل صفر اور ۱ کے درمیان ہوگی۔ اس آخری مساوات کی اصولوں کو بقدر ۵ کے گھٹانے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اسکی مطلق رقم صفر ہو جاتی ہے یعنی مجوزہ مساوات کی

۱۔ اصلوں کو بقدر ۳، ۴، ۵ کے گھٹانے سے اسکی مطلق رقم صفر میں تبدیل ہوتی ہے جس سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ دی ہوئی مساوات کی ایک اصل ۳۳۵ ہے۔ حسابی اعمال کا سلسلہ ذیل میں ظاہر کیا جاتا ہے :-

$$\begin{array}{r}
 ۲ \quad ۸۵ - \quad ۸۵ - \quad ۸۴ - \\
 ۸۰ \quad ۲۰۰ - \quad ۱۱۴۰۰ - \\
 \hline
 ۵ - \quad ۲۸۵ - \quad ۱۱۲۸۴ - \\
 ۸۰ \quad ۳۰۰۰ \quad ۹۵۹۲ \\
 \hline
 ۴۵ \quad ۲۴۱۵ \quad ۱۸۹۳ - \\
 ۸۰ \quad ۲۸۳ \quad ۱۸۹۳ \\
 \hline
 \quad ۳۱۹۸ \quad ۰ \\
 \quad ۵۰۱ \\
 \quad ۳۶۹۹ \\
 \quad ۸۴ \\
 \hline
 \quad ۳۷۸۲
 \end{array}$$

شکستہ خط پر استحالہ کے اختتام کی علامت ہے اور جبلی ہندسوں میں لکھے ہوئے اعداد متواتر استحالہ شدہ مساواتوں کے سر ہیں (دیکھو دفعہ ۳۳)۔ مثلاً

$$۲ + ۱۵۵ + ۱۲۴۱۵ - ۱۱۲۸۴ = ۰$$

(229) وہ مساوات ہے جبکی اعلیٰ دی ہوئی مساوات کی اصلوں سے بقدر ۴ کے چھوٹی ہیں اور جس کی مثبت اصل ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔ اگر دوسری استحالہ شدہ مساوات کی بالکل ٹھیک اصل ۵ نہ ہوتی بلکہ (فرض کرو) ۵ اور ۶ کے درمیان واقع ہوتی تو مجوزہ مساوات کی اصل کے پہلے تین ہند

۴۳۵ ہوتے اور چوتھا ہندسہ معلوم کر نیکے لئے اصولوں کو بقدر ۵ کے گھٹانا پڑتا اور علیٰ ہذا القیاس۔

۲۔ مساوات

$$۴ \text{ لا} - ۳ \text{ لا} - ۳۱ \text{ لا} - ۲۴۵ = ۰$$

کی مثبت اصل معلوم کرو۔
ہم پہلے حسابی عمل لکھ لیتے ہیں اور پھر اسکے متعلق کچھ بحث کریں گے۔

| | | | | | | | | |
|---|---|-------------|---|---------------|---|---------------|---|-----|
| ۴ | - | ۱۳ | - | ۳۱ | - | ۲۴۵ | - | ۴۳۵ |
| | | ۲۴ | | ۶۶ | | ۲۱۰ | | |
| | | <u>۱۱</u> | | <u>۳۵</u> | | <u>۶۵</u> | | |
| | | ۲۴ | | ۲۱۰ | | ۵۱۶۳۹۲ | | |
| | | <u>۳۵</u> | | <u>۲۴۵</u> | | <u>۱۳۶۶۰۸</u> | | |
| | | ۲۴ | | ۱۱۶۹۶ | | ۱۳۶۶۰۸ | | |
| | | <u>۵۹</u> | | <u>۲۵۶۶۹۶</u> | | <u>۰</u> | | |
| | | ۶۸ | | ۱۲۶۱۲ | | | | |
| | | <u>۵۹۶۸</u> | | <u>۲۶۹۶۰۸</u> | | | | |
| | | ۶۸ | | ۳۶۰۸ | | | | |
| | | <u>۶۰۶۶</u> | | <u>۲۴۶۶۱۶</u> | | | | |
| | | ۶۸ | | | | | | |
| | | <u>۶۱۶۴</u> | | | | | | |
| | | ۶۲ | | | | | | |
| | | <u>۶۱۶۶</u> | | | | | | |

آزمائش سے ہمیں یہ معلوم ہوتا ہے کہ مجوزہ مساوات کی مثبت اصل ۶ اور ۷ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔ اس لئے اصل کا پہلا ہندسہ ۶ ہے۔
اصولوں کو بقدر ۶ کے گھٹاؤ۔ استعمل شدہ مساوات

$$۴ \text{ لا} + ۵۹ \text{ لا} + ۲۴۵ \text{ لا} - ۶۵ = ۰$$

کی اصل صفر اور ایک کے درمیان ہے۔ امتحان کرنے سے اسکا ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہونا معلوم ہو جاتا ہے۔ اسلئے مجوزہ مساوات کی اصل کے پہلے دو ہندسے ۶۲ ہیں۔ پھر اصولوں کو بقدر ۲ کے گھٹاؤ استعمال شدہ مساوات کی اصل ۵-۶ ہوگی۔ پس مجوزہ مساوات کی مطلوبہ اصل ۶۵۲۵ ہے۔

عمل میں ہولت و آسانی پیدا ہوگی اگر علامت اعشاریہ سے اجتناب کیا جائے چنانچہ اس بجنے کی ترکیب یہ ہے:- جب اصل کا اعشاریہ حصہ (فرض کرو..... ج ب د) نمودار ہو تو متناظر استعمال شدہ مساوات کی اصولوں کو ۱۰ سے ضرب دیدو یعنی پہلی انصافی قطار میں جو عدد ہے اسکی دائیں جانب ایک صفر گھٹاؤ دوسری قطار میں جو عدد ہے اسکی دائیں جانب دو صفر تیسری قطار میں جو عدد ہے اسکی دائیں جانب تین صفر اور علیٰ ہذا القیاس اگر قطاریں تعداد میں زیادہ ہوں (اور یہ بات فی الواقع ہوگی جب دی ہوئی مساوات تیسرے درجے سے بڑے درجے کی ہیں) اب استعمال شدہ مساوات کی اصل..... ج ب د نہیں بلکہ..... ج ب د ہوگی۔ اصولوں کو بقدر ۱ کے گھٹاؤ استعمال شدہ مساوات کی اصل..... ج ب د ہوگی۔

پھر اس مساوات کی اصولوں کو ۱۰ سے ضرب دو تو اصل ہو جائیگی..... ج د ب اور پھر وہی عمل جاری کرو۔ اس اصول کو واضح کر کے کی خاطر ہم اوپر کے حسابی عمل کو علامت اعشاریہ حذف کر کے دہراتے ہیں:-

(230)

| | | |
|------------|---------|---------|
| ۶۵۲۵ - ۲۱۰ | ۳۱ - ۶۶ | ۱۳ - ۲۲ |
| ۶۵۰۰۰ - | ۳۵ | ۱۱ |
| ۵۱۳۹۲ | ۲۱۰ | ۲۲ |
| ۱۳۶۸۰۰۰ - | ۲۴۵۰۰ | ۳۵ |
| ۱۳۶۸۰۰۰۰ | ۱۱۹۶ | ۲۲ |
| ۰ | ۳۵۶۹۶ | ۵۹۰ |
| | ۱۱۱۲ | ۵۹۸ |
| | ۲۶۹۰۸۰۰ | ۸ |
| | ۳۰۸۰۰ | ۶۰۶ |
| | ۲۷۲۱۶۰۰ | ۸ |
| | | ۶۱۴۰ |
| | | ۲۰ |
| | | ۶۱۶۰ |

آئندہ تمام مثالوں میں یہ اختصار اختیار کیا جائیگا۔

۳۔ مساوات

$$۲۰\lambda^۲ - ۱۲۱\lambda - ۱۲۱ = ۱۴۱$$

کی مثبت اصل معلوم کرو۔

اصل کا ۷ اور ۸ کے درمیان واقع ہونا آسانی کے ساتھ معلوم ہو جاتا ہے۔ اسلئے اس کی شکل ہے ب ۷۷۔ اصلوں کو بقدر ۷ کے گھٹانے اور ۱۰ سے ضرب دینے سے حاصل ہونیوالی مساوات ہے

$$۲۰\lambda^۲ + ۲۹۹۰\lambda + ۱۱۲۵۰۰ = ۵۷$$

اسکی مثبت اصل ب ۷۷ ہے اور چونکہ یہ اصل صریحاً صفر اور ایک کے درمیان واقع ہوتی ہے اسلئے ۱ = . اور اسلئے اصل کے اعشاری حصہ میں ہم پہلے ہندسہ صفر لکھتے ہیں اور پھر دوسرے استعمال کو عمل میں لانے سے بیشتر اصلوں کو ۱۰ ضرب دیتے ہیں۔ اس طور پر استحالہ شدہ مساوات کی اصل کا ۵ کے مساوی ہونا آسانی کے ساتھ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

جواب :- ۵ - ۷۷۔ اوپر کی مثالوں میں اصل بہت جلد ختم ہو گئی ہے لیکن صرف تین ہندسوں کے بعد۔ لیکن جب عمل حساب طول طویل ہو اور متواتر آئیو الے ہندسوں کو اندراج کے ذریعہ معلوم کرنا ضروری ہو تو یہ کام بہت محنت طلب ہو جائیگا۔ اس محنت سے تھوڑی بہت نجات مل سکتی ہے جیسا کہ دفعہ آئندہ سے ظاہر ہوگا۔ ہائرر کے طریقہ کے اہم ترین غلی فائدوں میں سے ایک فائدہ یہ ہے کہ اصل کے دوسرے یا تیسرے (بعض اوقات صرف پہلے) ہندسہ کے بعد خود استحالہ شدہ مساوات سے صرف آزمائش کے ذریعہ بعد کے ہندسہ کا علم ہو جاتا ہے۔ اس اصول کو اب واضح کیا جائیگا۔

۱۰۹۔ آزمائشی مقسوم علیہ کا اصول - دفعہ ۷۷ میں ہم نے

(231)

یہ دیکھا ہے کہ جب کسی مساوات کو لا کی بجائے ۱ + ھ درج کے مستحیل کیا جاتا ہے جہاں ۱ ایسا عدد ہے جو صحیح اصل سے بقدر ھ کے (جو لمبا ۱ کے چھوٹا ہے) فرق رکھتا ہے تو ھ کی تقریبی قیمت

ف (۱) کو ف (۱) سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اب ہارنر کے طریقہ میں متواتر آتیوالی استحالہ شدہ مساداتیں اس قسم کے استحالوں کا نتیجہ ہوتی ہیں جن میں آخری سرف (۱) اور آخر سے دوسرا سرف (۱) ہوتا ہے (دیکھو دفعہ ۳۳)۔ پس عمل کی دو یا تین منزلیں طے ہونیکے بعد جس اصل کا باقی حصہ معلوم شدہ حصہ کے ساتھ چھوٹی نسبت رکھے تو آخری استحالہ شدہ مسادات کے آخری سرف کو آخر سے دوسرے سرف سے تقسیم کرنے سے اصل کے مزید دو یا تین ہندسے صحیح طور پر حاصل ہونے کی ہم امید کر سکتے ہیں۔ اس لئے اگر ہم چاہیں تو ہارنر کے طریقہ میں عمل کے کسی منزل پر اصل کا مزید تقرب حاصل کرنے کی خاطر نیوٹن کا طریقہ استعمال کر سکتے ہیں۔ ہارنر کے طریقہ میں یہ اصول اس وقت استعمال کیا جاتا ہے جب اصل کے معلوم شدہ ہندسوں کے بعد آنے والے ہندسہ کا پتہ لگانا مقصود ہو۔ ہر استحالہ شدہ مسادات کے آخر سے دوسرے سرف کو ہم آزمائشی مقسوم علیہ کے نام سے موسوم کرینگے۔ مثلاً دفعہ مابقی کی دوسری مثال میں عدد ۵ کا پتہ آزمائشی مقسوم علیہ ۲۶۹۰۸۰۰ سے صحیح طور پر لگ جاتا ہے۔ اس مثال میں پہلی استحالہ شدہ مسادات کے آزمائشی مقسوم علیہ سے اصل کا دوسرا ہندسہ بھی ٹھیک طور پر معلوم ہو جاتا ہے اگرچہ بالعموم ایسا نہیں ہوتا۔ طالب علم کو استحالہ شدہ مسادات کے صدر (Leading) سرور کے ممکن اثر کا اندازہ لگانا ہوگا۔ لیکن یہ معلوم ہوگا کہ ان رقموں کا اثر کم سے کم تر ہوتا جائیگا جیسے جیسے اصل کے ہندسے یکے بعد دیگرے حاصل ہوتے جائینگے۔

مثالیں

۱۔ مسادات $لا^۳ + لا^۲ + لا - ۱۰۰ = ۰$

کی مثبت اصل اعشاریہ کے چار مقامات تک معلوم کرو۔
یہ آسانی کے ساتھ معلوم ہو جاتا ہے کہ اصل ۴ اور ۵ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔ ہم عمل حساب لکھ لیتے ہیں اور پھر اس پر تنقید کریں گے:-

| | | | |
|------------|------------|---------|--------|
| ۴۵۲۶۴۴) | ۱۰۰-
۸۴ | ۱
۲۰ | ۱
۴ |
| ۱۶۰۰۰- | ۲۱ | ۵ | |
| ۱۱۹۲۸ | ۳۶ | ۲ | |
| ۴۰۰۰۰۰- | ۵۰۰ | ۹ | |
| ۳۰۸۸۳۶۶ | ۲۶۴ | ۲ | |
| ۲۸۳۶۲۴۰۰۰- | ۵۹۶۴ | ۱۳۰ | |
| ۲۵۶۰۰۱۰۴۴ | ۲۶۸ | ۲ | |
| ۲۰۵۵۲۲۵۶- | ۶۲۳۲۰۰ | ۱۳۲ | |
| | ۸۱۹۶ | ۲ | |
| | ۶۳۱۳۹۶ | ۱۳۲ | |
| | ۸۲۳۲ | ۲ | |
| | ۶۳۹۶۲۸۰۰ | ۱۳۶۰ | |
| | ۵۵۱۳۶ | ۶ | |
| | ۶۴-۱۰۹۳۶ | ۱۳۶۶ | |
| | ۵۵۱۵۲ | ۶ | |
| | ۶۴-۰۰۳۰۸۸ | ۱۳۰۲ | |
| | | ۶ | |
| | | ۱۳۰۸۰ | |
| | | ۲ | |
| | | ۱۳۰۸۲ | |
| | | ۲ | |
| | | ۱۳۰۸۸ | |
| | | ۴ | |
| | | ۱۳۰۹۲ | |

پہلے اصلوں کو بقدر ۴ کے گھٹاؤ۔ اب چونکہ اعشاریہ صہ ظاہر ہونے کو ہے

اس لئے استعمال شدہ مساوات کے سروں کو دفعہ ۱۰۸ مثال ۲ میں بتلائے ہوئے طریقہ کی بموجب صفر لگاؤ۔ سہرہ ۱۳۰۰۰۵ کے مقابلہ میں چھوٹا ہے اس لئے ہم یہ امید کر سکتے ہیں کہ آزمائشی مقسوم علیہ سے اصل کے دوسرے ہندسہ کا پتہ مل سکتا ہے۔ اس بات کا خیال رہے کہ ہر صورت میں جس ہندسہ کو اصل کے حصہ کے طور پر ہم اختیار کر رہے ہوں گے وہ ایسا بڑے سے بڑا عدد ہونا چاہیئے جو استعمال کے عمل میں مطلق رقم کی علامت کو تبدیل نہیں کرتا۔ یہاں ایسا عدد ۲ ہے۔ استعمال شدہ مساوات

$$لا + ۱۳۰۰۰۵ - لا - ۱۶۰۰۰ =$$

کی اصلوں کو قدر ۲ کے گھٹانے میں مطلق رقم اپنی علامت برقرار رکھتی ہے (۲-۴۲) اگر ہم ہندسہ ۳ کو اختیار کرتے تو مطلق رقم مثبت ہو جاتی جو اس بات کی علامت ہے کہ ہم اصل سے آگے ہو گئے ہیں۔ ہمیں اس بات کی احتیاط رکھنی چاہئے کہ پہلے استعمال کے بعد (اس قید کا سبب مثال آئندہ میں نظر آئیگا) مطلق رقم پورے عمل میں اپنی علامت برقرار رکھے۔ اگر ہم نے سہواً بہت چھوٹا ہندسہ اختیار کیا ہے تو خطا خود طے ہو جائیگی جیسا کہ معمولی تقسیم یا جذر نکالنے کے عمل میں ہوا کرتا ہے کیونکہ ایسی صورت میں اس کے بعد آئیوالا ہندسہ ۹ سے بڑا ہو گا۔ ایسی غلطی ہونیکا احتمال بالعموم بہت کم ہے۔ لیکن ایسی خطا کثرت سے واقع ہوتی ہے جو ضرورت سے بڑے ہندسہ کے لینے میں سرزد ہوتی ہے اور اس خطا کا پتہ مطلق رقم کی علامت بدلتانے سے چل جائیگا۔ اوپر کے عمل حساب میں پانچویں استعمال کو کام میں لائے بغیر یہ معلوم ہو جاتا ہے کہ حل کا پانچواں ہندسہ ۴ ہے چنانچہ مطلوبہ اصل اعشاریہ کے چار صحیح مقامات تک ۴۶۲۶۴۴ ہے۔

۲۔ مساوات

$$لا + ۴ - لا - ۱۱ لا + ۴ =$$

کی ایک اصل ۱ اور ۲ کے درمیان ہے۔ اسکی قیمت اعشاریہ کے چار مقامات تک معلوم کرو۔

| | | | | | |
|---------------|-------------|----------|-------|---|---|
| ۱۵۶۳۶۹) | ۴ | ۱۱- | ۲- | ۴ | ۱ |
| ۱.۰- | ۱ | ۱ | ۵ | ۱ | |
| ۶.۰۰۰۰- | ۱.۰- | ۱ | ۱ | ۵ | |
| ۵.۹۷۶ | ۷ | ۶ | ۶ | ۱ | |
| ۹.۲۴۰۰۰۰- | ۳.۰۰۰- | ۷ | ۷ | ۶ | |
| ۷۲۶۹-۵۶۱ | ۱۱۲۹۶ | ۷ | ۷ | ۱ | |
| ۱۷۵۲۹۲۳۹۰۰۰۰- | ۸۲۹۶ | ۱۲۰۰ | | ۷ | |
| ۱۵۲۱۳۱-۵۲.۱۶ | ۱۲۸-۸ | ۵۱۶ | | ۱ | |
| ۲۳۳۶۳۳۷۹۸۲- | ۲۳۳۰۲۰۰۰ | ۱۹۱۶ | ۸۰ | | |
| | ۹۲۶۱۸۷ | ۵۵۲ | ۶ | | |
| | ۲۲۲۳-۱۸۷ | ۲۲۶۸ | ۸۶ | | |
| | ۹۳۵۶-۱ | ۵۸۸ | ۶ | | |
| | ۲۵۱۶۵۷۸۸۰۰۰ | ۳۰۵۶۰۰ | ۹۲ | | |
| | ۱۸۹۲۸۷۲۲۶ | ۳۱۲۹ | ۶ | | |
| | ۲۵۳۵۵۱۷۵۳۳۶ | ۳۰۸۷۲۹ | ۹۸ | | |
| | ۱۸۹۷۶۲۸۸ | ۳۱۲۸ | ۶ | | |
| | ۲۵۵۲۲۹۲۱۸۲۲ | ۲۱۱۸۶۷ | ۱۰۲۰ | | |
| | | ۳۱۲۷ | ۳ | | |
| | | ۳:۵۰۱۲۰۰ | ۱۰۲۳ | | |
| | | ۶۳۱۵۶ | ۳ | | |
| | | ۲۱۵۶۲۵۵۶ | ۱۰۲۶ | | |
| | | ۶۳۱۹۲ | ۳ | | |
| | | ۲۱۶۲۷۷۲۸ | ۱۰۲۹ | | |
| | | ۶۳۲۲۸ | ۳ | | |
| | | ۳۱۶۹-۹۷۶ | ۱۰۵۲۰ | | |
| | | | ۶ | | |
| | | | ۱۰۵۲۶ | | |
| | | | ۶ | | |
| | | | ۱۰۵۳۲ | | |
| | | | ۶ | | |
| | | | ۱۰۵۳۸ | | |
| | | | ۶ | | |
| | | | ۱۰۵۴۲ | | |

(234)

پانچویں احتمال کی تکمیل کے بغیر ہم یہ دیکھتے ہیں کہ اصل کا پانچواں ہندسہ ۹ ہے۔ اس لئے اُشاریہ کے چار صحیح مقامات تک اصل کی قیمت ہے ۱۱۶۳۶۹ دوسرے احتمال کے بعد سے آزمائشی مقسوم علیہ موثر ہو جاتا ہے چنانچہ اس سے عدد ۳ ٹھیک طور پر معلوم ہوتا ہے اور پھر اصل کے دیگر ہندسے بھی پہلی احتمال شدہ مساوات کی آخری دو رقمیں منفی ہیں۔ اس لئے ہم اس بات کی امید کر سکتے ہیں کہ آزمائشی مقسوم علیہ سے قبل کے سروں کا اثر آزمائشی مقسوم کی بہ نسبت زیادہ ہونا چاہئے جیسا کہ اس صورت میں یہ امر واقعہ ہے۔ ہندسہ ۶ جو اصل کا دوسرا ہندسہ ہے اندراج کے ذریعہ معلوم کرنا چاہئے۔ ہمیں اس بات کی تعمین کرنی ہوگی کہ مساوات

$$۸۰ + ۸۰۰ + ۱۴۰۰ - ۳۰۰ - ۳۰۰ - ۶۰۰۰ = ۰$$

کی اصل کا صفر اور ۱۰ کے درمیان محل وقوع کیا ہے۔ چند آزمائشوں سے معلوم ہو جائیگا کہ ۶ سے منفی نتیجہ حاصل ہوتا ہے اور ۷ سے مثبت۔ پس اصل ۶ اور ۷ کے درمیان واقع ہے اور ۶ وہ ہندسہ ہے جس کی ہمیں جستجو ہے۔ اس کے بعد کے ہندسوں کے لئے ہم وہ بڑے سے بڑے ہندسے ۳، ۶، ۹ لیتے ہیں جو مطلق رقم کی منفی علامت کو تبدیل نہیں کرتے۔ پہلے احتمال میں اصولوں کو بقدر ایک کے گھمانے میں مطلق رقم کی علامت بدلتی ہے جس کے یہ معنی ہیں کہ ہم صفر اور ایک کے درمیان والی اصل سے گزر چکے ہیں کیونکہ صفر سے مثبت نتیجہ ۴ حاصل ہوتا ہے اور ایک سے منفی نتیجہ -۶ باقی تمام احتمالات میں جب تک کہ ہم اصل کے نیچے رہتے ہیں مطلق رقم کی علامت وہی ہونی چاہئے جو ایک کے اندراج سے حاصل ہوتی ہے اور یہ فی الحقیقت اس بات کا فرض کر لینا ہے کہ کوئی اصل ایک اور اس ہندسہ کے درمیان واقع نہیں ہوتی جس کی ہمیں تلاش ہے۔ یہ مفروضہ سوال کی عبارت سے ہی ظاہر ہے۔ واقعہ یہ ہے کہ مجوزہ مساوات کی دو اصلیں مثبت ہیں۔ ان میں سے ایک اصل صفر اور ایک کے درمیان واقع ہے اور اسلئے صرف ایک ۱ اور ۲ کے درمیان ہوگی۔

اگر ہارنر کے طریقہ میں منقطع حدود کے اندر دو اصلیں موجود ہوں یعنی اگر مساوات کی اصلوں کا ایک زوج تقریباً مساوی ہو تو چند پیش بینیوں کی ضرورت پڑتی ہے جنکو کسی آئندہ دفعہ میں بیان کیا جائیگا۔

۳۔ مثال مابقی کی وہ اصل اعشاریہ کے چار مقامات تک معلوم کرو جو صفر اور ایک کے درمیان واقع ہے۔ ۱۰ سے ضرب دیکر اپنے عمل کی ابتدا کرو تو سر ہونگے

$$۲۰ - ۲۰۰ - ۱۱۰۰۰ - ۲۰۰۰۰$$

چونکہ صدر سر متقابلاً چھوٹے ہیں اس لئے آزمائشی مقسوم علیہ فوراً موثر ہو جاتا ہے۔ مطلق رقم کی مثبت علامت پورے عمل میں برقرار رہنی چاہیے۔
جواب :- ۰.۵۳۳۷۳

۴۔ مساوات

$$۳ - ۳ + ۵ - ۱۰۰۰۰ = ۰$$

کی وہ اصل اعشاریہ کے تین مقامات تک معلوم کرو جو ۹ اور ۱۰ کے درمیان واقع ہے۔
[۳ کا صفر سر شامل کرو] جواب :- ۹۱۸۸۶

اب تک جن مثالوں پر غور کیا گیا ہے ان میں اصل کو اعشاریہ کے صرف چند مقامات تک معلوم کیا گیا تھا۔ اب ہم ایسا طریقہ بیان کریں گے جس کی مدد سے تین یا چار اعشاریہ کے مقامات تک اصل کو اوپر کے طریقہ سے معلوم کریں گے بعد متعدد اور ہندسے ایک مختصر عمل سے بہت آسانی کے ساتھ ٹھیک طور پر حاصل کئے جاسکتے ہیں۔

۱۱۔ ہارنر کے عمل کا اختصار۔ اجمالی تقسیم کے معمولی عمل میں

(235)

جب دئے ہوئے ہندسے ختم ہو جاتے ہیں تو یکے بعد دیگرے انہو کے مقسوموں کو صفر لگانے کی بجائے ہم مقسوم علیہ کے ہندسوں کو یکے بعد دیگرے سیدھی طرف سے کاٹتے جاتے ہیں اس طور پر کہ خود مقسوم علیہ چند منزلوں کے بعد جو اس کے ہندسوں کی تعداد پر منحصر ہوتی ہیں ختم ہو جائے اور

اس طور پر جو خارج قسمت حاصل ہوتا ہے وہ اصلی خارج قسمت سے صرف آخری ہندسہ میں یا زیادہ سے زیادہ آخری دو ہندسوں میں فرق رکھیں گے۔ ہارنر کے اجمالی عمل میں بھی یہی اصول ہے۔ ہم صرف وہ ہندسے برقرار رکھتے ہیں جو نتیجہ کو تقریب کے مطلوبہ درجہ تک حاصل کرنے میں موثر ہوں۔ جب اجمالی عمل شروع ہوتا ہے تو استعمال شدہ مسادات کے متواتر سروں کو قبل الذکر طریقہ پر صفر لگانے کی بجائے ہم آخر سے دوسرے سر کے سیدھی طرف والے ایک ہندسہ کو آخر سے تیسرے سر کے سیدھی طرف والے دو ہندسوں کو آخری سے چوتھے سر کے سیدھی طرف والے تین ہندسوں وغیرہ کو کاٹ دیتے ہیں۔ اس کا اثر یہ ہوگا کہ عمل میں اہم ہندسے اپنی اپنی خاص جگہ پر قائم رہیں گے اور غیر اہم ہندسے کلاً خارج ہو جائیں گے۔

طالب علم کے لئے بہتر یہ ہوگا کہ وہ ذیل کی مثالوں میں پہلی مثال میں اجمالی طریقہ سے حاصل کئے ہوئے پہلے استعمال کا مقابلہ اس متناظر استعمال کے ساتھ کرے جو دفعہ ماضی کی دوسری مثال میں مکمل طور پر حاصل کیا گیا ہے۔ تب اُسکو معلوم ہو جائیگا کہ کس طرح صدر ہند سے (یعنی وہ ہندسے جو نتیجہ کے حاصل کرنے میں اہم ترین حصہ لیتے ہیں) دونوں صورتوں میں منطبق ہوئے ہیں اور اپنے اضافی مقامات برقرار رکھتے ہیں حالانکہ غیر اہم ہندسے کلاً خارج ہو جاتے ہیں۔

اس اختصار کے علاوہ جو اوپر بیان ہوا ہارنر کے عمل کے دیگر اختصاروں کی بھی بعض اوقات سفارش کی جاتی ہے لیکن ہم انکا ذکر کرنا اس وجہ سے ضروری نہیں سمجھتے کہ ان سے بہت کم فائدہ حاصل ہوتا ہے اور نیز غلطی کے احتمالات بڑھ جاتے ہیں۔ متذکرہ بالا اختصار ہارنر کے طریقہ تقریب میں استدر اہم تھا کہ اس طریقہ کا ذکر بغیر اس کو بیان کئے ہوئے غیر مکمل رہ جاتا۔

مثالیں

۱۔ دفعہ سابق کی مثال ۲ میں جو مساوات درج ہے اس کی وہ اصل
اعشاریہ کے سات یا آٹھ مقامات تک معلوم کرو جو ۱ اور ۲ کے درمیان ہے۔
اس مثال کے نتیجہ کو تسلیم کر کے ہم اجالی عمل تیسرے استحالہ کی تکمیل کے
بعد سے شروع کریں گے چنانچہ اس استحالہ کے بعد کا عمل ذیل میں درج ہے:۔

$$\begin{array}{r}
 ۱۶۳۶۹۱۳۵۴۵) ۱۰۵۴۹۴۳۹- \\
 \underline{۱۵۲۱۳۰۹۰} \\
 ۲۳۳۶۳۲۹- \\
 \underline{۲۳۰۱۵۹۴} \\
 ۳۴۴۵۲- \\
 \underline{۲۵۶۰۱} \\
 ۹۱۵۱- \\
 \underline{۴۶۸۰} \\
 ۱۴۴۱- \\
 \underline{۱۲۸۰} \\
 ۱۹۱- \\
 \underline{۱۴۹} \\
 ۱۲
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 ۲۵۱۶۵۴۸۸ \\
 \underline{۱۸۹۳۶} \\
 ۲۵۳۵۵۱۵ \\
 \underline{۱۸۹۴۲} \\
 ۲۵۵۴۴۸۴ \\
 \underline{۲۸۵} \\
 ۲۵۵۴۳۳ \\
 \underline{۲۸۵} \\
 ۲۵۶۰۱۴
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 ۳۱۵۰۴۳۳ \\
 \underline{۶} \\
 ۳۱۵۶ \\
 \underline{۶} \\
 ۳۱۶۲ \\
 \underline{۶} \\
 ۳۱۶۸ \\
 \underline{۳۱}
 \end{array}$$

یہاں ہندسوں کو کاٹ دینے کے پہلے عمل سے یعنی آخر سے دوسرے
سر سے ۸، آخر سے تیسرے سر سے ۱۴، آخر سے چوتھے سر سے ۵۲۔ کو خارج
کر دینے سے چار درجہ کا پہلا سر صرف ایک رہ جاتا ہے۔ اب ہم اصلوں کو
بقدر ۶ کے گھماتے ہیں گویا کہ سر ۱، ۳۱۵، ۲۵۱۶۵۴۸، ۱۰۵۴۹۴۳۹-
جوابی رہ جاتے ہیں کبھی مساوات کے سر نہیں۔ اصل کے ایسے ہندسہ سے

ضرب دینے میں منقطع ہندسوں کو ذہن میں ضرب دے لینا چاہئے تاکہ حاصل کے ہندسہ کو حساب میں شامل کیا جاسکے جیسا کہ مختصر تقسیم میں کیا جاتا ہے۔

جب اصلوں کو بقدر ۶ کے گھٹانے کا عمل مکمل ہو جائے تو استعمال شدہ کنبی میں پھر ہم آخر سے دوسرے سر سے ۷، آخر سے تیسرے سر سے ۶۸، قطع کرتے ہیں اور پہلا سر بالکل غائب ہو جاتا ہے۔ عمل پھر اس طور پر جاری رہتا ہے گویا صرف دو درجی کے سروں کو ۳۱، ۲۵۵، ۲۴۸، ۲۳۳، ۶۳۲۹ سے واسطہ ہے۔ ہندسوں کو پھر قطع کرنے کے عمل کا اثر یہ ہوگا کہ سرا ۳۱ بالکل خارج ہو جائیگا۔ بعد کا عمل اجمالی تقسیم کے عمل کے مماثل ہو جاتا ہے۔ جب عمل ختم ہو جاتا ہے تو خارج قسمت میں اعشاری ہندسوں کی تعداد آخر کے دو یا تین ہندسوں تک صحیح خیال کیجا سکتی ہے اجمالی عمل شروع کرنے سے پیشتر اصل کو جس حد تک معلوم کرنا پڑتا ہے وہ اعشاریہ کے مطلوبہ مقامات کی تعداد پر منحصر ہوتی ہے کیونکہ اجمالی عمل شروع ہو جانے کے بعد معلومہ ہندسوں کے علاوہ ہمیں ہندسوں کی اتنی تعداد جو آزمائشی مقسوم علیہ کے ہندسوں کی تعداد سے بقدر ایک کے کم ہے حاصل ہوگی۔

۲۔ مسادات

$$لا - ۱۲ لا + ۷ = -$$

کی وہ اصل جو ۲ اور ۳ کے درمیان ہے اعشاریہ کے سات یا آٹھ مقامات تک معلوم کرو۔

(237) اس مسادات کی صرف دو مثبت اصلیں ہو سکتی ہیں، ایک اصل صفر اور ایک کے درمیان واقع ہوتی ہے اور دوسری ۲ اور ۳ کے درمیان۔ دوسری کو معلوم کرنے کے لئے ہم

ذیل کا عمل کرتے ہیں :-

| | | | | |
|---------------|----------|---------|--------|-----|
| ۲۶۰۴۶۲۷۵۵۶۷۱) | ۷ | ۱۲- | ۰ | ۰ |
| ۸۳۸۹۱۲۵۶ | ۸- | ۸ | ۴ | ۲ |
| ۱۶۱۰۸۵۴۳- | ۲- | ۲- | ۲ | ۲ |
| ۱۵۴۹۳۴۰۱ | ۲۴ | ۲۴ | ۸ | ۲ |
| ۶۱۵۱۴۳- | ۲۰۰۰۰۰۰ | ۱۲ | ۱۲ | ۲ |
| ۴۴۶۲۶۲ | ۹۷۲۸۶۴ | ۱۲ | ۶ | ۲ |
| ۱۶۸۸۸۱- | ۲۰۹۷۲۸۶۴ | ۲۴۰۰۰۰ | ۳۲۱۶ | ۲ |
| ۱۵۶۲۲۶ | ۹۸۵۷۹۲ | ۲۴۳۲۱۶ | ۸۰۰ | ۴ |
| ۱۲۶۵۵- | ۱۷۴۷۸ | ۳۲۳۲ | ۸۰۲ | ۴ |
| ۱۱۱۵۹ | ۲۲۱۳۳۴۳ | ۲۴۶۴۴۸ | ۳۲۴۸ | ۴ |
| ۱۴۹۶- | ۱۷۴۷۸ | ۲۲۳۰۸۲۴ | ۲۴۹۶۹۶ | ۸۰۸ |
| ۱۳۳۸ | ۲۲۳۱۳۱ | ۲۴۹۶ | ۲ | ۸۱۲ |
| ۱۵۸- | ۲۹ | ۲۲۳۱۳۱ | ۲ | ۲ |
| ۱۵۶ | ۲ | ۲۲۳۱۸۰ | ۸۱۲ | |

یہاں اصولوں کو بقدر ۲ کے گھٹانے کے بعد اور استیال شدہ مساوات کی
 اصولوں کو ۱۰ سے ضرب دینے سے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ آزمائشی مقسوم علیہ
 ۲۰۰۰۰، مطلق رقم ۱۰۰۰۰ کو تقسیم نہیں کر سکتا۔ اس لئے ہم خارج قسمت
 میں صفر رکھتے ہیں اور پھر اصولوں کو ۱۰ سے ضرب دیتے ہیں۔ باقی کا عمل
 حسب سابق کیا گیا ہے۔

۳۔ اسی مساوات کی وہ اصل معلوم کرو جو منفرد اور ایک کے درمیان
 واقع ہے۔

جواب :- ۵۹۳۶۸۵۸۲۹

۴۔ مساوات

لا^۱ + لا^۲ ۲۴۷۸۴ - لا^۱ ۶۷۵۶۱۳ - لا^۲ ۶۷۵۶۱۳ - لا^۳ ۳۷۶۱۵۲۷۵۸ = ۰
کی نسبت اصل معلوم کرو۔

جب مجوزہ مساوات میں علامات اعشاریہ شامل ہوں تو یہ معلوم ہوگا کہ اصل کا اعشاری حصہ شروع ہونے کے بعد ۱۰ سے متواتر ضرب دینے کی وجہ سے وہ بہت جلد غائب ہو جاتی ہیں۔

جواب :- ۱۱۶۱۹۷۳۲۲۲

۵۔ مساوات

لا^۱ - لا^۲ ۱۲ + لا^۳ ۱۲ - لا^۴ ۳ = ۰

کی منفی اصل اعشاریہ کے سات مقامات تک معلوم کرو۔

جب منفی اصل معلوم کرنا مطلوب ہو تو لا کی علامت بدل دینے اور استعمال شدہ مساوات کی متناظر نسبت اصل معلوم کرنے میں سہولت ہوگی۔

جواب :- ۳۶۹۰۷۳۷۸۵

(238)

۱۱۱۔ ہارنر کے طریقہ کا استعمال ایسی صورتوں میں جہاں

اصلیں تقریباً مساوی ہوں۔ دفعہ ۱۰۷ میں ہم نے یہ دیکھا ہے کہ تقریب کا وہ طریقہ جو ہاں بیان ہوا ناکام رہتا ہے جب مجوزہ مساوات کی دو اصلیں تقریباً مساوی ہوں۔ اس نوعیت کی مثالیں اپنی تحلیل (دیکھو مثال ۹۸) اور اپنے حل دونوں میں سب سے زیادہ مشکلیں پیدا کرتی ہیں۔ ہارنر کے طریقہ سے ایسی مساواتوں کا حل معلوم کرنا ممکن ہے اگرچہ دوسری صورتوں کی بہ نسبت ہمیں ذرا زیادہ محنت کرنی پڑتی ہے۔ جب تک کہ دونوں اصلوں کے صدر ہند سے ایک ہی رہتے ہیں اس وقت تک چند پیش بند یوں پیش نظر رکھنا ضروری ہے۔ یہ پیش بندیاں ذیل کی مثالوں سے ظاہر

ہو جائیگی۔ دونوں اصولوں کو جدا کرنے کے بعد عمل حساب ہر ایک کے لئے جداگانہ طور پر دفعت مابقی کی مثالوں کی طرح کیا جاتا ہے۔ دفعہ ۱۰۹ میں آزمائشی مقسوم علیہ کی جو تشریح کی گئی ہے اس سے یہ ظاہر ہے کہ زیر بحث صورت میں بیون کا طریقہ جس سبب سے ناکام رہتا ہے (دفعہ ۱۰۷) اسی سبب سے آزمائشی مقسوم علیہ اس وقت تک موثر نہیں ہوگا جب تک کہ اصولوں کو جدا کرنے کے بعد پہلی یا دوسری منزل کی تکمیل نہ ہو جائے۔

مثالیں

۱۔ مساوات

$$لا^۳ - ۷ لا + ۷ = ۰$$

کی دو اصلیں ۱ اور ۲ کے درمیان ہیں (دیکھو مثال ۲ دفعہ ۹۶)۔ ہر ایک اصل اعشاریہ کے ۸ مقامات تک معلوم کرو۔

اصولوں کو بقدر ۱ کے گھٹانے سے استحالہ شدہ مساوات (ان اصولوں کو

۱۰ سے ضرب دینے کے بعد) یعنی

$$لا^۳ + ۳۰ لا - ۳۰۰ = ۱۰۰۰$$

کی دو اصلیں صفر اور ۱۰ کے درمیان ہونی چاہئیں۔ ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

یہ اصلیں واقع ہوتی ہیں ایک تو ۳ اور ۴ کے درمیان اور دوسری ۶ اور ۷

کے درمیان۔ اب اصلیں جدا ہو جاتی ہیں اور ہم ہر ایک کے دریافت کر لیں

وہی عمل اختیار کرتے ہیں جو پہلے میان ہو چکا ہے۔ اگر اس منزل پر اصلیں

جدا نہ ہوں تو ہم وہ صدر ہندسہ معلوم کرتے جو دونوں میں مشترک

ہوتا اور پھر اصولوں کو بقدر اس ہندسہ کے گھٹانے کے بعد یہ دیکھتے کہ استحالہ شدہ

مساوات کی اصلیں کن وقفوں کے درمیان واقع ہوتی ہیں اور علیٰ ہذا القیاس

جواب :- ۱۵۳۵۶۸۹۵۸۴ - ۱۵۶۹۲۰۲۱۴

۲۔ مساوات

$$لا^۳ - ۱۴ لا + ۵۸ لا - ۱۳۷ = ۰$$

کی وہ دو اصلیں معلوم کرو جو ۲۰ اور ۳۰ کے درمیان واقع ہیں -
 ان میں سے چھوٹی اصل کے لئے تقریب کا مکمل عمل اعشاریہ کے ۷
 مقامات تک بنایا جائیگا اور پھر چند مشاہدات کئے جائیں گے تاکہ طالب علم کو اس
 قسم کی تمام صورتوں میں مدد مل سکے -

(239)

| | | | |
|------------|----------|----------|-------|
| ۲۳۰۲۱۳۱۲۷۷ | ۱۳۷۹- | ۶۵۸ | ۲۹-۱ |
| | ۱۵۶۰ | ۵۸۰- | ۲۰ |
| | ۱۸۱ | ۷۸ | ۲۹- |
| | ۱۸۰- | ۱۸۰- | ۲۰ |
| | ۱۰۰۰ | ۱۰۲- | ۹- |
| | ۹۹۲- | ۲۲ | ۲۰ |
| | ۸۰۰۰ | ۶۰- | ۱۱ |
| | ۶۷۳۹- | ۵۱ | ۳ |
| | ۱۲۶۱۰۰۰ | ۹۰۰- | ۱۲ |
| | ۱۲۱۷۲۰۳- | ۲۰۲ | ۳ |
| | ۲۳۵۹۷ | ۲۹۶- | ۱۷ |
| | ۳۲۱۸۳- | ۲۰۸ | ۳ |
| | ۹۲۱۲ | ۸۸۰۰- | ۲۰۰ |
| | ۶۷۸۶- | ۲۰۶۱ | ۲ |
| | ۲۶۲۸ | ۶۷۳۹- | ۲۰۲ |
| | ۲۳۷۲ | ۲۰۶۲ | ۲ |
| | ۲۵۶ | ۲۶۷۷۰۰- | ۲۰۲ |
| | ۲۳۶- | ۶۱۸۹۹ | ۲ |
| | ۲۰ | ۲۰۵۸۰۱- | ۲۰۶۰ |
| | | ۶۱۹۰۸ | ۱ |
| | | ۳۳۳۸۹۳- | ۲۰۶۱ |
| | | ۲۰۶ | ۱ |
| | | ۳۲۱۸۳- | ۲۰۶۲ |
| | | ۲۰۶ | ۱ |
| | | ۳۳۹۷۷۷۷۷ | ۲۰۶۳۰ |
| | | ۲ | ۳ |
| | | ۳۳۹۳- | ۲۰۶۳۳ |
| | | ۲ | ۳ |
| | | ۳۳۸۹-۲ | ۲۰۶۳۶ |
| | | | ۳ |
| | | | ۲۰۶۳۹ |

اصول کو بقدر ۲۰ کے گھٹانے سے مطلق رقم کی علامت بدلجاتی ہے
یہ اس بات کی علامت ہے کہ ایک اصل صفر اور ۲۰ کے درمیان واقع
ہے جس سے فی الحال ہمیں کوئی تعلق نہیں پہلی استحالہ شدہ مساوات
لا + لا - لا = لا + لا + لا =

کی اصلیں تاہم جدا نہیں ہوں گی کیونکہ دونوں ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔ ان دونوں عددوں کے اندراج سے مثبت نتیجہ حاصل ہوتا ہے اور اس لئے یہاں ہمیں وہ معیار نہیں ملتا جو پچھلی مثالوں میں مخصوص ہندسہ کی تلاش کرنے میں مدد دینے کے لئے حاصل ہوا تھا یعنی مطلق رقم میں علامت کی تبدیلی نہیں ملتی۔ تاہم ایک دوسرا معیار ایسا ہے جس سے صرف اندراج کے ذریعہ وہ وقفہ معلوم ہو سکتا ہے جس کے اندر یہ دونوں اصلیں واقع ہوتی ہیں۔ اگر ہم $11 - 10.2 = 0.8$ کی

اصلوں کو بقدر ۴ کے گھٹائیں تو احتمالہ شدہ مساوات ل^۱ + ۲۳ ل^۲ + ۴۳ ل^۳ + ۱۳ = ۰ میں علامت کی کوئی تبدیلی ظہور پذیر نہیں ہوتی۔ پس یہ دونوں اصلیں صفر اور ۴ کے درمیان واقع ہونی چاہئیں۔ اگر ہم اس کی اصلوں کو بقدر ۳ کے گھٹائیں تو احتمالہ شدہ مساوات میں (جیسا کہ اوپر کے عمل سے ظاہر ہے) علامت کی تبدیلیوں کی تعداد وہی ہے جو خود مساوات میں علامت کی تبدیلیوں کی ہے۔ پس یہ دونوں اصلیں ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔ اس لئے وہ اب تک جدا نہیں ہوئیں اور ہم اصلوں کو بقدر ۳ کے گھٹائے ہیں۔ دوسری احتمالہ شدہ مساوات

$$۳۰۰ + ۲۰۰ - ۹۰۰ + ۱۰۰ = ۰$$
 میں اسی طرح دونوں اصولوں کا ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہونا معلوم ہوتا ہے کیونکہ بقدر ۲ کے گھٹانے سے استقامت مساوات کے سروں میں علامت کی دو تبدیلیاں رہتی ہیں (دیکھو عمل بالا) اور بقدر ۳ کے گھٹانے سے تمام علامتیں مثبت حاصل ہوتی ہیں۔ چنانچہ اس حد تک دونوں اصلیں اپنے پہلے تین ہندسوں تک مماثل ہیں یعنی ۲۲۲ تک۔ پھر ہم بقدر ۲ کے گھٹانے سے

استعمال شدہ مساوات $لا^۲ + ۲۰۶۰ لا - ۸۸۰۰ + ۱۲۶۱ = ۰$ کی صرف ایک اصل ۱ اور ۲ کے درمیان واقع ہوتی ہے کیونکہ ۱ سے مثبت اور ۲ سے منفی نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔ اس کی دوسری اصل ۲ اور ۳ کے درمیان ہے کیونکہ ۳ سے مثبت نتیجہ ملتا ہے۔ اب اصلیں جدا ہو گئیں۔ ہم عمل بالائیں چھوٹی اصل کا تقرب اس مساوات کو بقدر ۱ کے گھٹانے سے حاصل کرتے ہیں۔ آزمائشی مقسوم علیہ دوسری منزل سے موثر ہو جاتا ہے۔ بڑی اصل کا تقرب حاصل کرنا ہو تو اسی مساوات کی اصلوں کو بقدر ۲ کے گھٹانا چاہئے اور اس بات کی احتیاط رکھنی چاہئے کہ بعد کے اعمال میں منفی علامت جو اس استعمال کی وجہ سے مطلق رقم کی ہوگی برقرار رہے۔ یہ دوسری اصل ہوگی $۲۲۹۵۲۱۲ - ۲۳۶$ ۔

جب تک دونوں اصلیں ایک ساتھ رہتی ہیں اصل کے مناسب ہندسہ کا پتہ آخر سے دوسرے سر سے آخری سر کو دو چند کر کے تقسیم کرنے سے ملے گا ہے یا آخر سے تیسرے سر سے آخر سے دوسرے سر کو دو چند کر کے تقسیم کرنے سے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ مجوزہ مساوات اب ایسے دو درجی کے قریب آتی ہے جو ہر استعمال شدہ مساوات کے آخری تین سروں سے بنتی ہے۔ یہ بالکل ایسا ہی ہے جیسا کہ پچھلی صورتوں میں اور نیوٹن کے طریقہ میں مجوزہ مساوات کا تقرب آخری دو سروں سے بننے والی مفرد مساوات کی شکل میں حاصل ہوا تھا۔ متذکرہ صدر دو درجی کی دونوں اصلیں مجوزہ مساوات کی وہ اصلیں ہونگی جو تقریباً مساوی ہیں، اور جب مساوات $لا^۲ + ۲۰۶۰ لا + ج = ۰$ کی دونوں اصلیں تقریباً مساوی ہوں تو انہیں سے کوئی ایک $ج - ۲$ یا $ج - ۱$ سے تقریباً

حاصل ہو جاتی ہے۔ مثلاً اوپر کی مثال میں ہندسہ ۳ $\frac{۱۸۱ \times ۲}{۱۰۲}$ سے اور

ہندسہ ۲ $\frac{۱۰۰۰ \times ۲}{۹۰۰}$ سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔ اس طریقہ سے ہم عام

۱۱۲۔ **تقرب کا لگراج کا طریقہ**۔ لگراج نے عددی مساوات کی اصل کو ایک مسلسل کسر کی شکل میں بیان کرنے کا ایک طریقہ معلوم کیا ہے۔ لیکن چونکہ یہ طریقہ عملی مقاصد کے لئے بار بار کے طریقہ کے مقابلہ میں بہت آدنی حیثیت رکھتا ہے اس لئے اس کا صرف مختصر ذکر کرنے پر ہم اکتفا کریں گے۔

فرض کرو کہ مساوات $f(x) = 0$ کی ایک اور صرف ایک اصل متصلہ اعداد a اور b کے درمیان واقع ہے۔ مجوزہ مساوات میں a کی بجائے $a + \frac{1}{n}$ درج کرو۔ a میں استحالہ شدہ مساوات کی ایک اصل مثبت ہوگی۔ فرض کرو کہ امتحان کرنے سے اس کا b اور $a + \frac{1}{n}$ کے درمیان واقع ہونا معلوم ہوتا ہے۔ a میں یہ جو مساوات ہے اس کو $a = b + \frac{1}{n}$ کے اندراج سے مستحیل کرو۔

ی میں حاصل شدہ مساوات کی مثبت اصل کا a اور $b + \frac{1}{n}$ کے درمیان واقع ہونا معلوم کیا جاتا ہے۔ اس عمل کو جاری رکھنے سے اصل کا تقرب ایک مسلسل کسر کی شکل میں حاصل کیا جاتا ہے مثلاً

$$a = b + \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots$$

مثالیں

۱۔ مساوات

$$x^2 - 11x + 5 = 0$$

کی مثبت اصل کسر مسلسل کی شکل میں معلوم کرو۔

اصل ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہے۔ $2 = 11 + \frac{1}{5}$ کا استعمال

عمل میں لانے کے لئے اول ہم دفعہ ۳ کا عمل استعمال کرتے ہیں اور اصلوں کو بقدر ۲ کے گھٹاتے ہیں۔ پھر ہم وہ مساوات معلوم کرتے ہیں جس کی اصلیں استعمال شدہ مساوات کی اصلوں کی متکافی ہوں۔
اس طور پر مابین جو مساوات حاصل ہوتی ہے وہ ہے

(242)

$$۱۰ - ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ = ۰$$

اسکی ایک اصل ۱۰ اور ۱۱ کے درمیان ہے۔ $۱۰ + ۱ = ۱۱$ جی ۱
کرد تو ی میں مساوات حاصل ہوگی
۶۱ ی^۳ - ۹۴ ی^۲ - ۲۰ ی - ۱ = ۰
اسکی اصل ۲ اور ۳ کے درمیان ہے۔ رکھو $۱ + ۱ = ۲$ تو ۶
میں مساوات ہوگی

$$۵۴ ی^۳ + ۲۵ ی^۲ - ۸۹ ی - ۶۱ = ۰$$

جس کی اصل ۱ اور ۲ کے درمیان ہے۔ علیٰ ہذا القیاس -
اس لئے اصل کے لئے ہمیں ذیل کا جملہ حاصل ہوتا ہے :-

$$۱ + ۲ = ۳$$

$$۱ + ۱ = ۲$$

$$۱ + ۱ = ۲$$

$$..... + ۱$$

۲ - لا^۳ - لا^۲ - لا = ۰ کی مثبت اصل کسر مسلسل کی شکل میں معلوم کرو۔

جواب :- $۱ + ۳ = ۴$

$$۱ + ۵ = ۶$$

$$۱ + ۱ = ۲$$

$$..... + ۱$$

۱۱۳ - چار درجہ کا عددی حل۔ عددی مساواتوں کے حل کا

مضمون ختم کرنے سے پیشتر چھٹے باب میں بیان کردہ حل کے طریقوں کے عملی فائدوں کا ذکر کرنا ضروری ہے۔ گو یہ بیان کیا گیا تھا کہ مساواتوں کا عددی حل اس باب کے طریقوں سے عموماً سب سے زیادہ آسانی کے ساتھ حاصل ہو سکتا ہے لیکن ایسی صورتیں بھی ہیں جنہیں چار درجہ کے حل کے لئے چھٹے باب کے طریقوں کا استعمال کرنا سہولت بخش ہوتا ہے جب چار درجہ مساوات سے محول کعبی لمجائے جسکی ایک اصل متوافق ہو تو اس اصل کو فوراً معلوم کیا جاسکتا ہے اور چار درجہ کے حل کی تکمیل ہو سکتی ہے۔ ہم اس قسم کی چند مثالیں ڈیکارٹ کا طریقہ استعمال کر کے (دفعہ ۶۴) حل کرتے ہیں جو عموماً ایسی صورتوں میں عملی طور پر سب سے زیادہ سہولت بہم پہنچاتا ہے۔

مثالیں

۱۔ چار درجہ

$$x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 22x - 11 = 0$$

کو دو درجہ اجزاء میں تحلیل کرو۔

دفعہ ۶۴ کا مفروض اختیار کرنے سے ہم آسانی کے ساتھ حل کر لیتے

$$x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 22x - 11 = 0 \quad \text{ف} = 3x^3 - 3x^2 + 22x - 11$$

$$x^4 - 3x^2 = 11 - 22x$$

نیز $\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} (3x^2 - 3x + 22 - \frac{11}{x})$ اور $\frac{1}{x}$ اور $\frac{1}{x}$ کو محسوب کرنے سے $\frac{1}{x}$ کے لئے مساوات ملتی ہے

$$3x^2 - 3x + 22 - \frac{11}{x} = 0 \quad \text{ف} = 3x^2 - 3x + 22 - \frac{11}{x}$$

اصول کو x سے ضرب دو اور رکھو $3x^2 - 3x + 22 = 0$ ت تو

$$3x^2 - 3x + 22 = 0 \quad \text{ت} = 3x^2 - 3x + 22$$

اب مقسوم علیہم کے طریقہ سے یہ بہ آسانی معلوم ہوتا ہے کی اسکی

ایک اصل - ۶ ہے جس پر فہ = ۳ جس سے

$$۵۰ = ق + ق' \quad ۲ = ف$$

ان کو ادپر کی ساداتوں سے ساتھ ترکیب دیا جائے تو

فب = ۲ - فب = ۱ - اق = ۱ - اق = ۶ -

جب حق اور حق کی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں تو وہ مساوات جس سے

ف ق + ف ق کی قیمت حاصل ہوتی ہے اس بات کا تعین

کرہیگی کہ ق کی کونسی قیمت ف کے ساتھ اور کونسی ف کے ساتھ

یعنی چاہئے۔ اس لئے مجوزہ چار درجہ ذیل کے اجزاء میں تحلیل ہو جانا

$$(1 - \nu^2 - \nu)(1 + \nu^2 - \nu)$$

فہ کی دوسری دو قیمتوں کے ذریعہ ہم حاردرجی کو دو اور مقبول

خلیل کر سکتے ہیں یا ہم اسی عمل کو محصلہ دودرچی کے حل کرنے سے مکمل

کر سکتے ہیں۔

۲۔ چار درجہ ف (لا) = لا - لا - لا - لا + لا + لا + لا + لا

کواجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

فہ کے لئے مساوات ہے

۴۴۴ - ۱۹۵ - ۴۴۵ =

جسکی ایک اصل - ۵ ہے -

جواب :- $f(1) = (1^2 - 1)(1^2 - 2) = (-1)(-1) = 1$

٢٣ — فب (لا) = لا١، لا٢، لا٣. لا٤. لا٥. لا٦.

کو اجزاء میں تھلیل کرو۔

معمول کبھی ہے

$$= \frac{3185}{217} + \frac{214}{12} - 37$$

۱۱
یا اصلوں کو ۶ سے ضرب دینے سے

$$3185 + 451 = 3636$$

جواب :- ۳۶۱۷۸۱۴۳۹۳

$$۰ = ۵ - ۲ - ۲$$

کی مثبت اصل اعشاریہ کے ۸ یا ۹ مقامات تک معلوم کرو۔

جواب :- ۲۶۰۹۴۵۵۱۴۸۳

۳ — مساوات

$$۲ - ۲ - ۲ = ۵ - ۲ - ۲$$

کی ایک اصل ۳۰۰ اور ۴۰۰ کے درمیان ہے۔ اسکو معلوم کرو۔

جواب :- متوافق اصل ۳۲۵۶۴

۴ — مساوات

$$۴ - ۲ - ۲ = ۵ - ۲ - ۲$$

کی وہ اصل معلوم کرو جو ۲۰ اور ۳۰ کے درمیان ہے۔

جواب :- ۲۸۵۵۲۱۲۷۷۳۸

۵ — مساوات

$$۳ - ۲ - ۲ = ۵ - ۲ - ۲$$

کی وہ اصل اعشاریہ کے چھ مقامات تک معلوم کرو جو ۲ اور ۳ کے درمیان ہے۔

جواب :- ۲۶۵۵۷۳۵۱

۷ — مساوات

$$۲ - ۲ - ۲ = ۵ - ۲ - ۲$$

کی مثبت اصل اعشاریہ کے تقریباً ۱۰ مقامات تک معلوم کرو۔

جواب :- ۵۶۱۳۴۵۷۸۷۲۵۲۸

۸ — ۱۲۵ ۷۷۳۳۷۳۷۳۷۳ کا جذر الکعب معلوم کرو۔

جواب :- ۸۷۶۵

۹ — ۵۳۷۸۲۲ کا پانچواں جذر معلوم کرو۔

جواب :- ۱۴

۱۰ — کبھی مساوات

$$لا^۳ - لا^۲ + لا = ۰$$

کی سب اصلیں معلوم کرو۔

مثال ۷ صفحہ ۱۱۴ کی مساوات لا^۳ + لا^۲ + لا = ۰ مساوات
بالا میں تحویل ہوتی ہے۔

جواب :- ۱۵۸۷۹۳۸، ۱۵۳۴۷۲۹، ۱۵۳۲۰۹

چھوٹی مثبت اصل سے ذیل کے مسئلہ کا حل ملتا ہے :- ایک نصف
کرہ کو جس کا نصف قطر اکائی ہو دو مساوی حصوں میں قاعدے کے
متوازی مستوی سے تقسیم کرنا۔

$$لا^۳ + لا^۲ - لا - ۱ = ۰$$

۱۱۔ کبھی کی سب اصلیں معلوم کرو۔ (دیکھو مثال صفحہ ۱۴۵)

جواب :- ۱۵۸۰۱۹۴، ۱۵۴۵۰۴، ۱۵۲۴۶۹۸ (246)

۱۲۔ مساوات

$$لا^۵ + لا^۴ - لا^۳ - لا^۲ + لا + ۱ = ۰$$

کی منفی اصل ۱ اور صفر کے درمیان، اعشاریہ کے ۵ مقامات تک
معلوم کرو (دیکھو مثال ۳ صفحہ ۱۴۶)

جواب :- ۰.۶۲۸۴۶۳

۱۳۔ مساوات

$$لا^۳ - لا^۲ + لا - ۲۹۷۷۲۶ = ۰$$

کو حل کرو۔

ہم یہاں یہ دیکھتے ہیں کہ ایک اصل ۷۰ اور ۸۰ کے درمیان ہے۔
ہارنر کے عمل سے اس اصل کا ۷ ہونا معلوم ہوتا ہے۔ اس کا لاشع مساوات سے
دو اصلیں ملتی ہیں جن کو بقدر ۷۰ کے بڑھا دیا جائے تو کبھی کی باقی دو اصلیں
حاصل ہوتی ہیں۔

جواب :- ۷۰، ۷۰، ۳۴۷۷۲۶ - ۱۱

$$۱۴۔ مساوات لا^۴ - لا^۳ + لا^۲ + لا - ۴۰۳۸۵ = ۰$$

کی دو حقیقی اصلیں ہیں۔ ان کو معلوم کرو۔

جواب :- ۲۱۵۴۳ - ۶۷۳۱۴۵۵۹۲

مستر جی۔ ایچ۔ ڈارون نے اس مساوات کو مقالہ

On the precession of a viscous spheroid, and on the Remote History of the Earth

Phil. Trans. میں درج کیا ہے۔ دیکھو۔ حصہ دوم بابۃ ۱۸ صفحہ ۵۰۸۔ یہ اصلیں ”زمین کی گردش کے جذر الکعب کی دو قیمتیں ہیں جنکے لئے زمین اور چاند ملکر ایک استوار جسم کی طرح حرکت کرتے ہیں۔“

۱۵۔ مساوات

$$۰ = ۳ + ۲۲ \text{ لا} - ۲۰ \text{ لا}^۲$$

کی سب اصلیں معلوم کرو۔

جواب :- ۱۶۰۶۸۶۵۰۰۶۴۶۰۳۰۶۳۱۴۶۹

یہ مساوات ایک مسئلہ کے حل میں واقع ہوتی ہے جو پروفیسر ٹاؤن سینڈ نے ایجوکیشنل ٹائمز بابۃ دسمبر ۱۸۷۶ء میں ایک ایسے شہتیر کے انصراف کو متعین کرنے کے لئے بیان کیا ہے جو یکساں طور پر لدا ہوا ہو اور جو اپنے دونوں سروں اور تقاطع ثلثیت پر تہا ہوا ہو۔ متذکرہ صدر حل پروفیسر بال نے حاصل کیا تھا۔

۱۶۔ مساوات

$$۰ = ۱۰ - ۹ \text{ لا} - ۱۲ \text{ لا}^۲ + ۱۴ \text{ لا}^۳$$

کی مثبت اصل معلوم کرو۔

جواب :- ۶۸۵۹۰۶

یہ اور ذیل کی مثالوں کی مساواتیں ایسے سوالوں کی تحقیقات میں واقع ہوتی ہیں جو ٹیکنوں پر تھمے ہوئے شہتیروں سے متعلق ہوتے ہیں۔

۱۷۔ مساوات

$$۰ = ۸ - ۱۶ \text{ لا} - ۳ \text{ لا}^۲ + ۲۰ \text{ لا}^۳ + ۷ \text{ لا}^۴$$

کی مثبت اصل معلوم کرو۔

جواب :- ۵۹۱۳۳۶

۱۸- مساوات

$$= 2.4 - 0.1 + 0.5 + 0.9 + 0.1 + 0$$

کی مثبت اصل اعشاریہ کے دس مقامات تک معلوم کرو۔

جواب:- ۳۳-۵۸-۶۶۳۸۶۰

(247)

۱۹ - ف (۷) = ۷ + ۷ - ۷۳۶ - ۷۱۴۹ - ۷۲۳۲ - ۳۳۶ =

کی سب متوافق اصلیں معلوم کرو اور مساوات کا مکمل حل حاصل کرو۔

جواب :- $f(la) = (la + 3)(la + 2)(la - 1)$

۲۰۔ اسی طرح مساوات

ف (لا) = لا - لا^١ ٣٢ + لا^٢ ١١٦ - لا^٣ ١١٥ + لا^٤ ٨٢ - لا^٥ ١

کو حل کرو۔

جواب :- $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})(28 - \sqrt{2})$

۲۱۔ وہ شرماء معلوم کرو کہ دفعہ ۹۹ مثال ۳ میں اسٹرم کا جو دو درجی

باقی ہے اس کی اصلیں خیالی ہوں۔

جواب :- ۵۶ + ۱۳ = مثبت۔

یہ شرط اس وقت پوری ہوتی ہے جبکہ ۵ اور جے دونوں مثبت ہوں (کیونکہ اس صورت میں دفعہ ۳۷ کی متبادلہ کی رو سے ح کو مثبت ہونا چاہیے) اس لئے آسانی کے ساتھ یہ نتیجہ نکالا جاسکتا ہے کہ متذکرہ صدر چار درجہ حقیقی اعلیٰ نہیں رکھتا جبکہ ۵ اور جے مثبت ہوں (دیکھو مثال ۱۵ صفحہ ۳۲۳)

۲۲۔ جب اس چار درجہ کی دو اصلیں ع کے مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ع\text{ج}}{213-652} = ب + 1$$

۲۳۔ اگر مساوات $f(x) = 0$ کی سب سے زیادہ حقیقی ہوں تو

ثابت کرو کہ مساوات $f(لا) - [ف(لا)] = ۰$ کی سب اصلیں

خیالی ہیں۔
۲۴۔ اگر کسی درجہ کی مساوات میں جو لا کی قوتوں کی مجموعہ ترتیب دی گئی ہو تین متصل رتھیں سلسلہ ہندسیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ اس کی اصلیں سب کی سب حقیقی نہیں ہو سکتیں۔

یہ تین رتھیں اس شکل $ک لا + ک ع لا + ک ع لا$ کی ہونی چاہئیں۔ فرض کرو کہ مساوات کو لا۔ ع سے ضرب دیا گیا ہے۔ تب حاصل شدہ مساوات کی دو متصل رتھیں غائب ہو جائیں گی اور اسلئے اس کی کم از کم دو خیالی اصلیں ہونی چاہئیں لیکن اس مساوات کی اصلیں سوائے ع کے دی ہوئی مساوات کی اصلیں ہیں۔

۲۵۔ اگر کسی مساوات کے چار متصل سر سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ اسکی اصلیں سب کی سب حقیقی نہیں ہو سکتیں۔

اس کو گذشتہ مثال میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔ ان چار رتھوں کو انکی خاص شکل میں لکھ کر لا۔ اسے ضرب دینے سے یہ آسانی کے ساتھ معلوم ہوتا ہے کہ حاصل شدنی مساوات کی تین متصل رتھیں سلسلہ ہندسیہ میں ہیں۔

۲۶۔ پانچ درجہ کے لئے جس میں دوسری رتھ غیر موجود ہو اسٹرم کے پہلے دو باقیوں کو محسوب کرو۔

$f(لا) = لا + لا + ب لا + ج لا + د$

جواب :- $ک = لا - لا - ۲ ب لا - ۲ ج لا - ۵ د$

$ک = لا + ب لا + ج$

جہاں $۱ = لا - ج - ۱۲ لا - ۲ ب - ۲ ج - ۵ د - ۸ ب - ۶ ج$

$ج = ۲ - لا - ۵ ب - د$

اوپر کی ترقیم کو باقی رکھیں تو تیسرے باقی $ک = لا + ع$ کے سروں

سے حاصل ہونگی جہاں گ کی بجائے اسکی قیمت دفعہ ۳۷ کی تماشہ سے رکھی گئی ہے اور مثبت صفر و ب فیہ خارج کر دئے گئے ہیں۔
 ۳۰۔ یولر کے کمبی کے لئے اسٹرم کے تفاعل محسوب کرو (دفعہ ۶۱ دیکھو)
 چند تحویلات کے بعد اور مثبت اجزائے ضربی کو خارج کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$f(1) \equiv 1 + 3h + (1 - \frac{1}{12}e) - 1 - \frac{1}{12}g$$

$$f(1) \equiv 1 + 2h + 1 - \frac{1}{12}e - \frac{1}{12}g$$

$$k \equiv 1 + 2e + 1 - 12 - 12$$

$$k \equiv 1 - 2e$$

چار درجہ کی اصلوں کی نوعیت کے متعلق جو شرطیں دفعہ ۶۸ میں حاصل ہوئی ہیں سب کو ان نتیجوں سے مثال ۴ صفحہ ۸۳ کی مدد سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔ اور یہ دیکھ لیا جاسکتا ہے کہ اصلوں کے حقیقی ہونے کے لئے جو شرطیں دفعہ ۱۰۰ اور تذکرہ صدر دفعہ میں حاصل ہوئی تھیں دونوں یہاں باہم حاصل ہوتی ہیں۔ کیونکہ یولر کے کمبی کی سب اصلوں کے حقیقی اور مثبت ہونے کے لئے لا کی بجائے صفر درج کرنے سے علامت کی تین تبدیلیاں ملنی چاہئیں اور اسکے لئے اس بات کی ضرورت ہے کہ $1 - \frac{1}{12}e$ اور $1 - \frac{1}{12}g$ دونوں منفی ہوں۔

بارہواں باب

ملف اعداد اور ملف متغیر

۱۱۴۔ ملف اعداد۔ ترسمی تعبیر۔ ابواب گذشتہ میں اکثر ایسی مثالوں سے واسطہ رہا ہے جنہیں عددی مساواتوں کے حل میں $1 + x$ یا $1 - x$ کے شکل کی مقداریں واقع ہوئی ہیں جو منفی عدد کا جذر المربع نکالنے پر مشتمل ہیں۔ ایسے جملہ کو جسمیں مثبت یا منفی حقیقی اکائیاں اور ب مثبت یا منفی خیالی اکائیاں شامل ہوں ملف عدد کہا جاتا ہے (دیکھو دفعہ ۱۵)۔ خیالی اکائی یا -1 کو اختصاراً x سے تعبیر کیا جاتا ہے حقیقی اور خالص خیالی اعداد دونوں جملہ $1 + x$ یا $1 - x$ میں شامل ہیں کیونکہ قبل الذکر اعداد یعنی حقیقی اعداد $x = 0$ رکھنے اور ثانی الذکر $x = 1$ رکھنے سے حاصل ہوتے ہیں۔ ملف اعداد پر تمام معمولی حسابی اعمال جاری ہو سکتے ہیں اور کسی ایسے حسابی عمل کے نتیجہ میں x کی ایک سے بڑی صحیح قوتوں کو پیدا کرنے کی مدد سے مختصر کیا جاسکتا ہے۔

اب ہم ملف اعداد کو ہندسی طور پر تعبیر کرنے کا طریقہ واضح کرتے ہیں جو ان تفاضلوں کے سمجھنے میں بہت سہولت پیدا کریگا جنہیں اس قسم کی مقداریں شامل ہوتی ہیں۔

جملہ $1 + x$ کو شکل
(مہم) $(1 + x)^n$ جب x

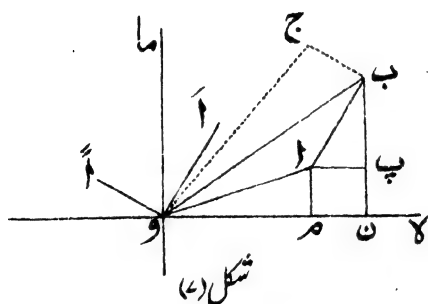
میں لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$م = \sqrt{ا + ب} \quad 'ا' = \frac{1}{م} \quad 'ب' = \frac{ب}{م}$$

مقدار مہ کو ملنے عدد ۱۰۰ ب کا مقیاس اور زاویہ عم
کو سمت کہتے ہیں۔ مقیاس کو ہمیشہ مثبت لیا جاتا ہے اور جذر کی منفی
علامت سمت کو بقدر ۲۲ کے برہانے کے جواب میں ہے۔
فرض کرو کہ علی القواہم محور ولا، وما (شکل ۷) لئے گئے ہیں

اور ۱ ایک ایسا نقطہ ہے کہ لا و ا = ع اور و ا = مہ - تب
و م = مہ جم ع = ا اور ا م = مہ جب ع = پ - اس لئے

جملہ 1 + 7 پ ن کو
ترسی طور پر اس
خط مستقیم سے تعبیر
کیا جاسکتا ہے
جو اسے اس
لمبائی گیا ہو جس کے
معد ثابت محوروں
کے لحاظ سے اس



ہونگے جبکہ $1 = 1$ اور $ب = ب$ یعنی جبکہ ان کے مقیاس باہم مساوی ہوں اور جبکہ سعت یا تو باہم مساوی ہوں یا ۲۲ کے ضعف کا فرق رکھیں۔
 اختصار کی خاطر آئندہ $1 + خ$ کے مقیاس اور سعت کو $ترقم$
 مق $(1 + خ)$ 'سعت $(1 + خ)$
 سے تعبیر کیا جائیگا۔

۱۱۵۔ ملف اعداد۔ جمع اور تفریق۔ فرض کرو کہ دوسرا
 ملف عدد $1 + خ$ خط مستقیم و $ا$ سے تعبیر ہوتا ہے اور اسلئے
 و $ا = مق (1 + خ)$ 'سعت $ا = سعت (1 + خ)$
 اب ہم حاصل جمع
 $1 + خ + 1 + خ$
 کو تعبیر کر نیا طریقہ متعین کرتے ہیں۔

(251)

اس مجموعہ کو شکل $1 + 1 + خ + ب + ب$ میں لکھنے سے
 دفعہ ۱۱۴ کی ترتیم کی بموجب ہم دیکھتے ہیں کہ یہ ایک ایسے خط مستقیم
 سے تعبیر ہوگا جو مبدا سے اس نقطہ تک کھینچا گیا ہو جس کے محدود
 $1 + 1 + ب + ب$ ہیں۔ اس نقطہ کو معلوم کرنے کے لئے $ا$ کو
 و $ا$ کے متوازی اور مساوی کھینچو تو چونکہ $ا$ ب پ علی الترتیب
 $ا$ ب کے مساوی ہیں ب مطلوبہ نقطہ ہے اور

وب = مق $\{ 1 + 1 + خ + ب + ب \}$

لاوب = سعت $\{ 1 + 1 + خ + ب + ب \}$

اسلئے دو ملف عددوں کو جمع کرنے کے لئے ہم و $ا$ کھینچیں
 جو انہیں سے ایک کو تعبیر کرتا ہے اور اس کے سرے پر $ا$ ب کھینچتے
 ہیں جو دوسرے کو تعبیر کرتا ہے (یعنی اس طور پر کہ اسکا طول دوسرے
 عدد کے مقیاس کے مساوی ہو اور و $ا$ کے ساتھ یہ خط جو زاویہ بنائے

وہ اس کی سمت کے مساوی ہو)۔ تب دب ان دو ملتف
عددوں کے مجموعہ کو تعبیر کریگا۔
اب چونکہ دب 'و' + 'ا' سے بڑا نہیں ہے یہ نتیجہ
نکلتا ہے کہ دو ملتف عددوں کے مجموعہ کا مقیاس ان کے
مقیاسوں کے مجموعہ سے کم (یا زیادہ سے زیادہ اس کے مساوی)
ہوتا ہے۔

اس طریقہ تعبیر کو اس قسم کی مقداروں کی کسی تعداد کا مجموعہ
معلوم کرنے میں تو وسیع دیکھا جاسکتی ہے۔ مثلاً تیسرے ملتف عدد
'ا' + 'خ' کو جمع کرنے کے لئے جو 'و' سے تعبیر ہوتا ہے ہم بج
'و' کے متوازی اور مساوی کھینچتے ہیں اور 'ج' کو ملائے ہیں۔ تب
'ج' تین ملتف اعداد 'و'، 'ا'، 'و' کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے۔
یہ بھی ظاہر ہے کہ ہم عام طور پر یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ ملتف مقداروں
کی کسی تعداد کے مجموعہ کا مقیاس ان کے مقیاسوں کے مجموعہ
سے کم (یا زیادہ سے زیادہ مساوی) ہوتا ہے۔

تفریق کو بھی اسی طرح تعبیر کیا جاسکتا ہے۔ چونکہ دب سے
'و' اور 'و' کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے، 'و' سے دب اور 'و' کا فرق
تعبیر ہوگا۔ اس لئے دو ملتف عددوں کو تفریق کرنا ہو تو پہلے عدد کو تعبیر
کرنیوالے خط کے سرے پر ہم ایک خط کھینچتے ہیں جو دوسرے عدد کو تعبیر
کرنیوالے خط کے متوازی اور مساوی ہے مگر مخالف سمت میں (یعنی
ایسی سمت میں جو 'و' کے ساتھ دوسرے کی سمت سے بقدر ۲۲ کے
زیادہ بڑا زاویہ بناتی ہے)۔ اس خط کے سرے کو ہم 'و' سے ملائے ہیں
تاکہ دئے ہوئے دو ملتف عددوں کے فرق کو تعبیر کرنیوالا خط ملجائے۔

۱۱۶ - ضرب اور تقسیم - دو ملف عدد ۱ + خ ب ۱ + خ ب

کو ضرب دینے کے لئے ان کو ہم اس شکل میں لکھتے ہیں

۱ + خ ب = مہ (جم عہ + خ جب عہ) ۱ + خ ب = مہ (جم عہ + خ جب عہ)
تو ڈیموائر کے مسئلہ کی رو سے

(252)

(۱ + خ ب) (۱ + خ ب) = مہ مہ {جم (عہ + عہ) + خ جب (عہ + عہ)}
جس سے ثابت ہے کہ دو ملف عددوں کا حاصل ضرب ایک
ملف عدد ہے جس کا مقیاس دونوں مقیاسوں کا حاصل ضرب
اور جسکی سعت دونوں سعتوں کا مجموعہ -

اسی طرح یہ معلوم ہوتا ہے کہ اس قسم کے اجزائے ضربی کی کسی
تعداد کا حاصل ضرب ایک ملف مقدار ہے جس کا مقیاس تمام مقیاسوں کا
حاصل ضرب ہے اور جسکی سعت تمام سعتوں کا مجموعہ -

۱ + خ ب کو ۱ + خ ب سے تقسیم کرنے کے لئے ہم دیکھتے ہیں کہ
 $\frac{1 + \text{خ ب}}{1 + \text{خ ب}} = \frac{\text{مہ}}{\text{مہ}} = \{ \text{جم (عہ - عہ) + خ جب (عہ - عہ)} \}$

جس سے ثابت ہے کہ دو ملف عددوں کا خارج قسمت
ایک ملف عدد ہے جس کا مقیاس دونوں مقیاسوں کے
خارج قسمت کے مساوی ہے اور جسکی سعت دونوں سعتوں
فرق کے مساوی -

دفعہ ۱۶ کے مسئلہ کے ثبوت میں یہ مان لیا گیا ہے کہ جب اجزائے
ضربی (خیالی یا حقیقی) کی کسی تعداد کا حاصل ضرب معدوم ہوتا ہے تو

ان میں سے ایک جزو ضروری کو معدوم ہونا چاہئے۔ جب تمام اجزائے ضروری حقیقی ہوں تو یہ مسئلہ بالکل واضح ہے اور اوپر جو کچھ ثابت ہوا اس سے اس وقت بھی جبکہ اجزائے ضروری ملطف ہوں یہی نتیجہ برقرار رہتا ہے کیونکہ حاصل ضرب کا مقياس اسی صورت میں معدوم ہو سکتا ہے جب ان میں سے کوئی جزو ضروری معدوم ہو اور اس لئے وہ ملطف مقدار معدوم ہونی چاہئے جس کا یہ جزو ضروری مقياس ہے۔

۱۱۷۔ ملطف عددوں پر دوسرے اعمال۔ پچھلے مسئلوں سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ملطف عدد کی کوئی صحیح قوت شکل $1 + x$ میں بیان کیجا سکتی ہے جہاں x اور b حقیقی ہیں۔ اور زیادہ عام صورت میں اگر کسی منطق صحیح تفاعل

$$b^i + a^j + \dots + 1 + a^m + b^n$$

میں جس کے سر ملطف (شہول حقیقی) عدد ہیں a کی بجائے ملطف مقدار $1 + x$ درج کیجائے تو نتیجہ کو معیاری شکل $1 + x$ میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

(288)

اس باب میں ملطف عددوں کے ایسے تفاعلوں پر بحث کرنا مقصود نہیں ہے جو منطق صحیح تفاعل کی اس نوع میں داخل نہیں ہیں جس سے ہمیں اب تک واسطہ رہا ہے۔ لیکن ڈیموایر کے مسئلہ کی مدد سے یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ علم الحساب کے بقیہ اعمال سے ہر صورت میں مثلاً کسری یا ملطف قوت نما براٹھانے کو کارآمد لینے اور ان قوتوں پر اٹھانے سے جن کی اساس اور قوت نما دونوں ملطف ہوں ایک ملطف عدد ہی حاصل ہوتا ہے۔ اس کو یوں بیان کیا جاتا ہے کہ ملطف عدد ایک ایسا انعام یا گروہ بناتے ہیں جو خود مکمل ہے۔

۱۱۸۔ ملطف متغیر۔ اس کتاب کے ابتدائی ابواب میں کثیر الارقام

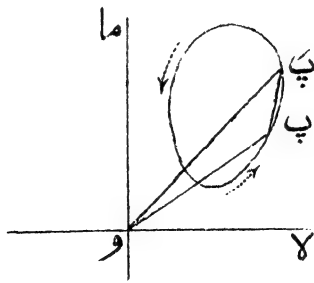
تغیر کا مطالعہ متغیر کی $-\infty$ سے $+\infty$ تک حقیقی قیمتوں میں سے گزرنے کے جواب میں کیا گیا تھا اور کثیر الارقام کی شکل کو ایک منحنی کے ذریعہ تعبیر کرنے کا طریقہ واضح کیا گیا تھا۔ یہ فی الحقیقت اس عام کثیر الارقام کی ایک خاص صورت ہے جس پر اب بحث کی جائیگی۔

فرض کرو کہ y میں ایک منطق اور صریح تفاعل دیا گیا ہے جس کے سر حقیقی یا ملطف عدد ہیں یعنی

$$f(y) = y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + \dots + y + 1$$

ہم اس کے تغیرات کا مطالعہ y کی مختلف قیمتوں کے جواب میں کر سکتے ہیں جہاں y ملطف شکل $la + x$ میں ہے اور جہاں la اور ma دونوں تمام ممکن حقیقی قیمتیں اختیار کرتے ہیں۔ اس شکل $la + x$ یا ko ہم ملطف متغیر کہیں گے۔ ظاہر ہے کہ اس تغیر کی تمام ممکن حقیقی قیمتیں $la + x$ یا ma کی قیمتوں میں شامل ہیں کیونکہ یہ وہ قیمتیں ہیں جو la کو بدلنے اور ma رکھنے سے پیدا ہوتی ہیں۔ دفعہ ۱۱۴ کے اصولوں کی بموجب ہم ملطف متغیر $la + x$ یا ko خط op (شکل ۸) سے تعبیر کر سکتے ہیں جو ایک ثابت نقطے o سے اس نقطہ تک پھینچا گیا ہے جس کے محدود la یا ma ہیں۔ یا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ $la + x$ یا ma نقطہ p سے تعبیر ہوتا ہے

(254)



اس طور پر $la + x$ یا ma کی تمام ممکن قیمتیں مستوی میں کے تمام نقطوں سے تعبیر ہونگی۔ اب چونکہ y کی کسی مخصوص قیمت کے لئے $f(y)$

شکل ۱ + خ ب (دفعہ ۱۱) اختیار کرتا ہے اس لئے ف (ی) کی قیمتوں کو اسی طرح ایک دوسرے مستوی میں کے نقطوں سے تعبیر کیا جاسکتا ہے۔ اس دفعہ میں ہم صرف خود متغیر لا + خ ما کی تعبیر کی طرف اپنی توجہ محدود رکھینگے جس میں ہم لا + خ ما کے تغیر کو مسلسل طور پر واقع ہوتا ہوا تصور کریں گے۔ مثلاً نقطہ لا، ما ایک معنی پر حرکت کرتا ہے۔ اگر و پ اور و پ سے متغیر کی دو متصل قیمتیں تعبیر ہوں تو ہم متناسق قیمتوں لا + خ ما، لا + خ ما کو طریقہ ذیل پر لکھتے ہیں:-

$$Y = لا + خ ما \equiv ر (جم طه + خ جب طه)$$

اب چونکہ و پ سے و پ اور و پ کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے (دفعہ ۱۱۵) یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ پ پ، ی کے اضافہ کو تعبیر کرتا ہے اور اگر ی = ی + ط تو ط کو شکل ذیل میں لکھا جاسکتا ہے:-

$$ه \equiv غه (جم نه + خ جب نه)$$

جہاں غه = پ پ اور نه وہ زاویہ ہے جو پ پ، و لا کے ساتھ بناتا ہے۔

ی کے مقیاس کا تغیر و پ - و پ ہے یا ر - ر اور اسکی سمت کا تغیر پ و پ ہے یا طه - طه - خود ی کا تغیر جیسا کہ اوپر بیان کیا گیا ه سے یا غه (جم نه + خ جب نه) -

ذرا غور کرو کہ نقطہ ایک بند معنی مرسم کرتا ہے۔ جب وہ اپنے ابتدائی مقام پ پر واپس پہنچتا ہے تو مقیاس پھر اپنی ابتدائی قیمت اختیار کرتا ہے اور سمت اپنی ابتدائی قیمت اختیار کرتی ہے اگر نقطہ و معنی کے باہر ہو یا قدر ۲۲ کے برہ جاتی ہے اگر و معنی کے اندر ہو۔ اگر ملف متغیر ایک ہی خط دو مخالف سمتوں میں مرسم کرے تو اسکی سمتوں کے تغیرات مساوی اور مختلف العلامت ہوتے ہیں یعنی اس تغیر صفر کے مساوی ہوتا ہے۔ اس سے ہم ملف متغیر کی سمت کے

تغیر کی ایک خاصیت اخذ کر سکتے ہیں جو آئندہ مشاہدات میں اہم ثابت ہوگی۔ فرض کرو کہ ایک مستوی رقبہ خطوط ب د، ا ف، ع ج، وغیرہ سے متعدد حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے (شکل ۹) تو پورے رقبہ کے محیط

(255)

کے لحاظ سے سمت کا تغیر جزوی رقبوں کے محیطوں کے لحاظ سے اس کے تغیرات کے مجموعہ کے مساوی ہے جہاں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ تمام رقبے تغیر کے ایک ہی سمت میں حرکت کرنے سے مرشم ہوئے ہیں۔ یہ نتیجہ بدیہی ہے کیونکہ جب نقطہ تمام رقبوں کو ایک ہی جہت میں مرشم کرتا ہے تو تقسیم کر نیوالے اندرونی خطوں میں سے ہر ایک دوبار مرشم ہوتا ہے مگر مخالف سمتوں میں اور بیرونی محیط صرف ایک مرتبہ مرشم ہوتا ہے پس سمت کا مجموعی تغیر تقسیم کر نیوالے خطوں کے لحاظ سے صفر کے مساوی ہے اور بیرونی محیط کے لحاظ سے اسکا جو تغیر ہے

صرف وہی باقی

رہتا ہے۔ مثال

کے طور پر شکل میں

رقبوں ا ب ف

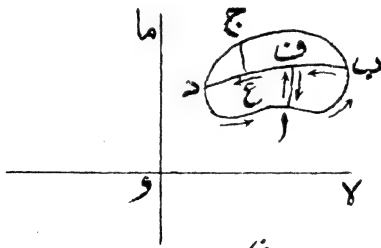
ا ف د پر غور

کرو۔ جب نقطہ

ان رقبوں کو تیروں

سے ظاہر کی ہوئی سمت میں مرشم کرتا ہے تو ا ف کے لحاظ سے مجموعی

تغیر صفر ہے۔



شکل (۹)

سے ظاہر کی ہوئی سمت میں مرشم کرتا ہے تو ا ف کے لحاظ سے مجموعی تغیر صفر ہے۔

۱۱۹۔ ملطف متغیر کے تفاعل کا تسلسل۔ فرض کرو کہ ملطف

متغیری ایک ثابت قیمت ی سے شروع کر کے ایک جھوٹا اضافہ Δ (جم نہ + خ جب نہ) حاصل کرتا ہے۔ تب اگر ف (ڈی) دیا جائے

تفاعل ہو تو دفعہ ۶ کے پھیلاؤ میں لا کی بجائے ی رکھنے سے

$$ف(ی) = ف(ی + ۵) = ف(ی) + ف(ی) + ۵ + \frac{ف(ی)}{۲ \times ۱} + ۵ + \dots$$

اور ف(ی) میں اضافہ جو ف(ی + ۵) - ف(ی) کے مساوی ہے

$$ف(ی) + ۵ + \frac{ف(ی)}{۲ \times ۱} + ۵ + \frac{ف(ی)}{۳ \times ۲ \times ۱} + ۵ + \dots$$

ہوگا۔

اس جملہ میں ۵ کی قوتوں کے سرسب کے سب معمولی شکل کے ملف جملے ہیں اور اگر ان کے مقیاس ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ وغیرہ ہوں تو متواتر قوتوں کے مقیاس ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ وغیرہ ہیں اور چونکہ دفعہ ۱۱۵ کی رو سے مجموعہ کا مقیاس، مقیاسوں کے مجموعہ سے کم ہوتا ہے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ف(ی) کے اضافہ کا مقیاس

$$۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، \dots$$

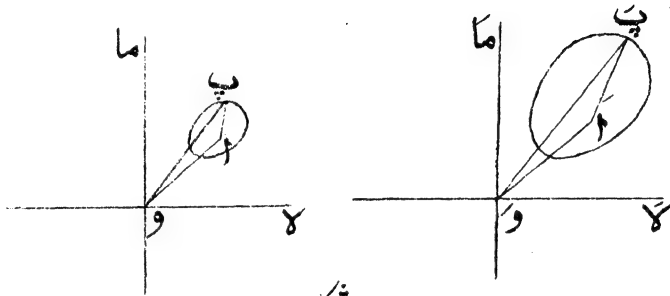
سے کم ہے۔

اب غہ کو ایسی قیمت دیا سکتی ہے (دفعہ ۵) جس کے لئے یا اس سے چھوٹی قیمت کے لئے اس جملہ کی قیمت کسی مقررہ مقدار سے کم ہو۔ اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ملف متغیر کے لا انتہا چھوٹے تغیر کے جواب میں (یعنی اس تغیر کے جواب میں جس کا مقیاس لا انتہا چھوٹا ہو) تفاعل میں بھی لا انتہا چھوٹا تغیر واقع ہوتا ہے۔ یہ الفاظ دیگر تفاعل ملف متغیر کے تغیر کے ساتھ ساتھ مسلسل بدلتا ہے۔

(256)

۱۲۰۔ ف(ی) کی سمت کا تغیر جب ملف متغیر ایک چھوٹا بند متغی مرتسم کرے۔ ی کی قیمتوں کے ایک مسلسل سلسلہ کے

جواب میں ف (ی) کی قیمتوں کا ایک مسلسل سلسلہ ملتا ہے جبکہ خود ی کی قیمتوں کی طرح، ایک مستوی میں کے نقطوں سے تعبیر کیا جاسکتا ہے۔ نقطوں کے ان سلسلوں کو ہم ایک دوسرے سے قریب دو شکلوں سے تعبیر کرتے ہیں (شکل ۱۰) جنکے متعلق یہ فرض کر لیا جاسکتا ہے



شکل (۱۰)

و مختلف مستویوں پر کھینچے گئے ہیں تاکہ غلط فہمی واقع نہ ہو۔
لا + خ کو تعبیر کرنے والے ہر نقطہ پ کے جواب میں ف (ی) کو تعبیر کرنیوالا ایک معین نقطہ پ حاصل ہوتا ہے۔ اس لئے جب 'پ' ایک مسلسل منحنی مرسم کرتا ہے تو پ بھی ایک مسلسل منحنی مرسم کرتا ہے اور جب 'پ' ایک بند منحنی کو مرسم کرنے کے بعد اپنے ابتدائی مقام پر لوٹتا ہے تو پ بھی اپنے ابتدائی مقام پر واپس آتا ہے۔

فی الحال ہمارا مقصد ف (ی) کی سمت کے تغیر پر بحث کرنا ہے جبکہ پ ایک بند منحنی مرسم کرے۔ فرض کرو کہ (پ کوئی معین نقطہ ہے جس کے محدد لا، ما یعنی ی = لا + خ ما ہیں۔ ہم بحث کو دو صورتوں میں تقسیم کرتے ہیں :-

(۱) جبکہ لا + خ ما، ف (ی) = کی اصل نہ ہو یعنی جبکہ ف (ی) سے مختلف ہو۔

(۲) جبکہ لا + خ با 'ف (دی) = کی اصل ہو یا ف (ی) =۔
 پہلی صورت میں نقطہ ا کے جواب میں ایک نقطہ ا ایسا موجود
 ہوتا ہے جو ف (ی) کی قیمت کو تعبیر کرتا ہے اور و (آ صفر سے
 مختلف ہوتا ہے۔ فرض کرو ی = ی + ھ جہاں ھ = غ (جم نہ
 + خ جب نہ) اور مان لو کہ پ جو ی کو تعبیر کرتا ہے ایک چھوٹا
 بند منحنی ا کے گرد مرسم کرتا ہے۔ فرض کرو کہ پ 'ف (ی) کو تعبیر
 کرتا ہے تو ا پ سے ف (ی) کا اضافہ، ی کے اضافہ ا پ
 کے جواب میں تعبیر ہوگا۔ اب دفعہ ماسبق سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ
 غ کہ اتنی چھوٹی قیمتیں دیکھا سکتی ہیں کہ ف (ی) کے اضافہ کا مقیاس ہے
 ا پ ہمیشہ کسی مقررہ مقدار ا سے چھوٹا ہو۔ پس یہ فرض
 کر لیا جاسکتا ہے کہ پ 'ا کے گرد اتنا چھوٹا بند منحنی مرسم کرتا ہے
 کہ اس کے متناظر پ سے مرسم شدہ بند منحنی و کے باہر ہو۔ اسلئے
 دفعہ ۱۱۸ کی رو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ پ سے اگر ایک چھوٹا بند منحنی
 مرسم ہو جس میں کوئی ایسا نقطہ شامل نہیں ہے جو ف (ی) = کو
 پورا کرتا ہے تو ف (ی) کی سعت کا کل تغیر کچھ نہیں ہوتا۔
 (۲) دوسری صورت میں فرض کرو کہ لا + خ با 'مسادات ف (ی) =
 کی ایک اصل ہے جو م مرتبہ تکرار پاتی ہے اور فرض کرو کہ
 ف (ی) = (ی - ی) (ی) (ی) (ی)

تب

ف (ی) = ھ پ (ی) = غ (جم نہ + خ جب م نہ) (ی) =
 اس صورت میں و (ا) = اور جب پ 'ا کے گرد ایک
 بند منحنی مرسم کرتا ہے تو پ اپنے ابتدائی مقام پر واپس ہوتا ہے اور
 ف (ی) کی سعت بقدر ۲۲ کے ضعف کے بڑھ جاتی ہے جسکو طریقہ

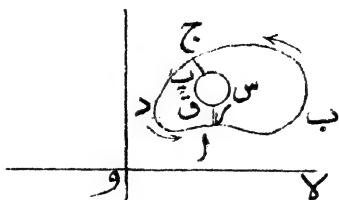
ذیل پر متعین کیا جاسکتا ہے :- مساوات بالا سے

سعت ف (ی) = م فہ + سعت پہ (ی)

(258) اور سعت ف (ی) کا اضافہ، م فہ کے اضافہ میں سعت پہ (ی) کا اضافہ جمع کرنے سے حاصل ہوگا۔ اب یہ دوسرا اضافہ (۱) کی رو سے کچھ نہیں کیونکہ پ سے جو بند منحنی مرسم ہوتا ہے اس کے متعلق یہ فرض کر لیا جاسکتا ہے کہ اس میں پہ (ی) = ۰ کی کوئی اصل شامل نہیں ہے۔ اور چونکہ فہ کا اضافہ، پ کی ایک گردش میں ۲۲ ہوتا ہے اس لئے م فہ کا اضافہ ۲ م ۲۲ ہے۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جب، پ ایک بند منحنی مرسم کرتا ہے جس میں مساوات ف (ی) = ۰ کی ایک اہل م رتبہ والی شامل ہے تو ف (ی) کی سعت میں بقدر ۲ م ۲۲ کے اضافہ ہوتا ہے۔

۱۲۱۔ کوشی کا مسئلہ۔ جب، ی، ایک مستوی میں ایک خط دو مخالف سمتوں میں مرسم کرتا ہے تو اس کے جواب میں ف (ی) اپنے مستوی میں ایک خط دو مخالف سمتوں میں مرسم کرتا ہے اور سعت ف (ی) میں مساوی اور مخالف تغیرات واقع ہوتے ہیں۔ اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر کسی مستوی رقبہ کو دفعہ ۱۱۸ کی طرح حصوں میں تقسیم کیا جائے تو سعت ف (ی) کا تغیر جو اسی جہت میں ی سے مرسم شدہ تمام جزوی رقبوں کے جواب میں ہے سعت ف (ی) کے اس تغیر کے مساوی ہوگا جو ی سے مرسم شدہ بیرونی محیط کے جواب میں ہے۔ اب فرض کرو کہ مستوی کا ہا لیں کوئی محیط مرسم ہوا ہے اور پہلے یہ فرض کرو کہ اس میں ایسا کوئی نقطہ شامل نہیں ہے جو مساوات ف (ی) = ۰ کو پورا کرتا ہو۔ اس کو متعدد دھچکے رقبوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے جن میں سے ہر ایک کے لئے دفعہ ۱۲۰ کی

صورت (۱) کے نتائج قائم رہتے ہیں اور جو کچھ کہ ابھی ثابت کیا گیا ہے اس سے یہ نتیجہ نکلتا



شکل (۱۱)

ہے کہ سعت ف (ی) کا تغیر جوی سے مرسم شدہ بند محیط کے جواب میں ہے کچھ نہیں ہے۔

دوسرے یہ فرض کرو کہ

بند محیط میں ایسا نقطہ شامل ہے جو مساوات ف (ی) = ۰ کی اصل ہے اور یہ اصل م مرتبہ تکراریاتی ہے۔ فرض کرو کہ اس نقطہ کے گرد ایک چھوٹا بند یعنی پ ق مرا سی کھینچا گیا ہے۔ اب ف (ی) وقت کا تغیر جوی سے مرسم شدہ پورے محیط کے متناظر ہے اسکے تغییرات کے مجموعہ کے مساوی ہے جو قبول (ب ج پ س مرا ج د ا م ق پ پ ق مرا س کی ترسیم کے متناظر ہیں۔ یہ دو تغییرات جو کچھ کہ اوپر ثابت ہوا اس کی وجہ سے معدوم ہو جاتے ہیں اور آخر کا تغیر دفعہ ۱۲۰، (۲) کی رو سے πm^2 کے مساوی ہے۔ پس ف (ی) کا مجموعی تغیر πm^2 ہے۔ اسی طرح اگر رقبہ میں ایسے اور نقطے بھی شامل ہوں جو م، م، وغیرہ مرتبہ تکراریاتی والی اصولوں کے جواب میں ہیں تو مجموعی تغیر $\pi (m^2 + m^2 + \dots + m^2) = \pi m^2$ ۔ پس ہم مسئلہ ذیل پر پہنچتے ہیں جو کوششی سے منسوب کیا جاتا ہے:-

ایک دے ہوئے رقبہ کے اندر کسی کثیرالارقام کی اصلوں کی تعداد اس کثیرالارقام کی سعت کے مجموعی تغیر کو جو ملف متغیر سے اس رقبہ کے محیط کی مکمل ترسیم کے جواب میں ہے πm^2 سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

۱۲۲۔ عام مساوات کی اصولوں کی تعداد۔ دفعات سابق کے ثابت شدہ اصولوں کی مدد سے ہم وہ مسئلہ ثابت کر سکتے ہیں جس کا ذکر دفعات ۱۵ اور ۱۶ میں کیا گیا تھا یعنی ہرن دیں درجہ کی منطق اور مکملہ مساوات کی ن خیالی یا حقیقی اصلیں ہوتی ہیں۔
فرض کرو کہ y کا منطق اور مکملہ تفاعل

ف (ی) = $y^1 + y^2 + \dots + y^n$
ہے۔ اب سو اِس مفروضہ کے ف (ی) 'متغیر کی کسی لا متناہی قیمتوں کے' معذور نہیں ہو سکتا ف (ی) = کی اصولوں کے وجود کے متعلق کوئی اور مفروضہ اختیار کئے بغیر ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ y اپنے مستوی میں اتنا بڑا دائرہ مرثیم کرتا ہے کہ اس کے باہر کوئی اصل وجود نہیں رکھتی۔ تب اگر

$$ف (ی) = \{ y^1 + y^2 + \dots + y^n \}$$

$$= y^n \text{ فہ (ی) 'جہاں } y = \frac{1}{y^n}$$

تو y جس کا مقیاس y کے مقیاس کا متکافی ہے ایک چھوٹا دائرہ مرثیم کرے گا جیسے اس مستوی کا ایک ایسا حصہ شامل ہو گا جو y سے مرثیم شدہ دائرہ کے باہر واقع ہو نیوالے ملف متغیر کی میدان کے جواب میں ہے اور اس کے لئے ف (ی) = کی کوئی اصل اس چھوٹے دائرہ کے اندر واقع نہیں ہو گی۔ پس y سے پورے دائرہ کی مرثیم کے جواب میں ف (ی) کی سمت کا تغیر = اور اس لئے
ف (ی) کی سمت کا تغیر = y^n کی سمت کا تغیر

اور اگر

ی = ر (جم طہ + خ جب طہ) یا ی = ز (جم ن طہ + خ جب ن طہ)

تو طہ بقدر ۲۲ کے بڑھ جاتا ہے اور اس لئے ی کی سعت بقدر ۲۲ کے بڑھ جاتی ہے۔

اب کوشی کے مسئلہ (دفعہ ۱۲۱) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ی سے مرتسم شدہ دائرہ کے اندر اصولوں کی تعداد یعنی مساوات ف (ی) = کی کل اصولوں کی تعداد ن ہے اور مسئلہ ثابت ہو چکا۔

(260)

اس طرح وہ مسئلہ جس کا ثبوت دفعہ ۱۵ میں ملوث کر دیا گیا تھا کوشی کے مسئلہ کا نتیجہ صریح ہے۔ اس لئے کوشی کے مسئلہ کو مساواتوں کے نظریہ میں بنیادی مسئلہ قرار دیا جاسکتا ہے۔ تاہم یہ دیکھنا واجب ہے کہ دفعہ ۱۵ کے مسئلہ کو بنیادی مساوات کی ایک عددی اہل ہوتی ہے بالراست کوشی کے مسئلہ کی مدد کے بغیر ان اصولوں کے ذریعہ ثابت کیا جاسکتا ہے جو دفعہ ۱۱۹ اور دفعات ماقبل میں مذکور ہیں۔ چنانچہ ہم اب اسکو اسی طرح ثابت کریں گے۔

۱۲۳۔ بنیادی مسئلہ کا دو سر ثبوت۔ اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ

ی کی کوئی قیمت ایسی نہیں ہے جو ف (ی) کو معدوم کرتی ہو۔ اور فرض کرو کہ قیمت ی جو نقطہ ۱ سے تعبیر ہوتی ہے (شکل ۱۰) مبدا و یہ پ کے قریب ترین ممکن محل ۱ کے جواب میں ہے۔ اب ہم یہ ثابت کرنا چاہتے ہیں کہ اضافہ کو ایسی سمت دیا جاسکتی ہے کہ پ کے محل میں آجائے جو مبدا سے ۱ کی یہ نسبت قریب تر ہو۔ ہم حسب ذیل پھیلاؤ جانتے ہیں (دفعہ ۱۱۹):

$$ف(ی+ھ) = ف(ی) + ف(ی)ھ + \frac{ف(ی)ھ^2}{2} + \dots + ھ^۲ + ھ^۳$$

حرکت کی سمت کچھ ہی ہو یعنی خواہ سمت ظہ کچھ ہی ہو وقت Δ و Δ کو نہ Δ میں Δ میں Δ ۔ پس ہم نے یہ ثابت کر دیا کہ اُمبدا کے لحاظ سے Δ کا قریب ترین ممکن محل نہیں ہے اور اسی طرح یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ صفحہ سے مختلف کوئی اور دوسری قیمت Δ (ی) کے مقیاس کی کم سے کم ممکن قیمت نہیں ہو سکتی۔

اس ثبوت میں جو اُپر دیا گیا ہے صرف یہ بتایا گیا ہے کہ مساوات کی اصل ہونی چاہئے لیکن اصولوں کی ٹھیک تعداد متعین نہیں کی گئی جیسا کہ اس ثبوت میں کی گئی ہے جسکا ماخذ کوشی کا مسئلہ ہے۔ تاہم جب یہ ثابت کر دیا گیا کہ کم از کم ایک اصل موجود ہونی چاہئے تو ثبوت کی تکمیل آسانی کے ساتھ دفعہ ۱۶ کے طریقہ سے ہو سکتی ہے۔

یہ دیکھنا ضروری ہے کہ جب Δ کی کسی مخصوص قیمت کیلئے Δ (ی) معدوم نہیں ہوتا تو Δ (ی) کے اضافہ کو Δ کے ساتھ جو نسبت ہے اس کی انتہائی قیمت مستقل Δ (ی) Δ (جم) Δ (خ) جب Δ ہے۔ یہ آسانی کے ساتھ ماخوذ ہو سکتا ہے کہ ان دونوں اضافوں کا درمیانی زاویہ مستقل ہوتا ہے اور ان کے مقیاس مستقل نسبت رکھتے ہیں۔ اس کو عام طور پر یوں بیان کیا جاتا ہے کہ Δ اور Δ سے Δ متسم شدہ شکلیں اپنے لائنہا چھوٹے حصوں میں ایک دوسرے کے متشابه ہیں۔

اس دفعہ کے مضمون پر مزید تحقیق مطلوب ہو تو کتاب کے آخر میں نوٹ ج کا مطالعہ کیا جائے۔

۱۲۴۔ ملفت عددی اصولوں کی تعین۔ کعبی کا حل۔

مساواتوں کے نظریہ پر جو تصنیفات موجود ہیں ان میں مساواتوں کی ملفت عددی اصولوں کو عملی طور پر متعین کرنے کی طرف بہت کم توجہ کی گئی ہے اور نہ یہ آسان ہے کہ ابتدائی درسی کتاب میں جہیں عام

(262)

طریقہ درج ہوں اسکی وضاحت خاطر خواہ کیجاسکے۔ نظری طور پر اس مسئلہ میں کوئی اشکال نہیں کیونکہ اگر ف (لا + خ ما) کے حقیقی اور خیالی حصے جدا گانہ صفر کے مساوی رکھے جائیں اور محصلہ دو مساواتوں سے کسی ایک متغیر کو ماقطہ کر دیا جائے تو ایک مساوات حاصل ہوگی جس سے دوسرے متغیر کی حقیقی قیمت ہارنر کے عمل سے معلوم کیجاسکتی ہے۔ لیکن یہ معلوم ہوگا کہ اس طریقہ کی عملی قدر و قیمت کچھ بھی نہیں ہے۔*

جی ہم اس دفعہ اور دفعات آئندہ میں اپنی توجہ صرف کعبی اور چار درج مساواتوں تک محدود رکھنے کے سرعۃً حقیقی اعداد ہوں۔ ان مثالوں میں صرف اس عمل حسابی کو پیش کیا جائیگا جو عملی مقاصد کے لئے سادہ ترین شکل رکھتا ہے۔ فرض کرو کہ حل کے لئے مساوات

$$ف (لا) = لا^۲ + ف لا + ق لا + ر = ۰$$

تجویز کی گئی ہے۔ اس کی اصلوں کو ع، ہ + ک، ہ۔ ک مان لیا جاسکتا ہے جہیں ع حقیقی ہے اور باقی اصلوں کی نوعیت خود اشنا ہے

* غالب علم اگر ماہرین ریاضی کی ان کوششوں کا مطالعہ کرنا چاہیں جو انہوں نے عددی مساواتوں کی ملفت اصلوں کو دریافت کرنے کے لئے کی ہیں تو وہ حسب ذیل کتابوں سے مدد لے سکتے ہیں۔ ۱۔ نگراںج :- مقالہ برائے حل عددی مساوات۔ ۲۔ مرنی :- جبری مساواتوں کا نظریہ ۳ :- سائمن سٹینر :- عددی مساواتوں کا عام حل (دیں ۱۸۵۸) ۴۔ پی۔ سی۔ یلینگ :- اعلیٰ عددی مساواتوں کا حل (مطبوعہ لاہور ۱۸۶۵) ایمری ملیا کلفٹوک :- وقت واحد میں کسی مساوات کے تمام اصلوں کو دریافت کرنے کا طریقہ۔ (امریکن جرنل آف سائنس ۱۸۷۷ء شمارہ ۲۱) ۵۔ ایم۔ ای۔ کاروالو :- جبری یا ماورائی مساواتوں کا مکمل عددی حل دریافت کرنے کا عملی طریقہ (مطبوعہ پیرس ۱۸۹۶ء)۔

عمل حساب میں معلوم ہو جائے گی کیونکہ ک کی تعین اس کے مربع سے ہوتی ہے جو ممکن ہے منفی ہو یا مثبت۔ مساوات کی کوئی ابتدائی تحلیل ضروری نہیں۔ اگر لا کی بجائے $h + k$ درج کیا جائے اور ک کی جفت اور طاق قوتوں کے مجموعوں کو جدا گانہ صفر کے مساوی رکھا جائے (دیکھو مثال ۲۶ صفحہ ۲۲) تو ہمیں فوراً ذیل کی مساوات مل جاتی ہے:-

$$-k^2 = f^2 (h) = 3h^2 + 2f^2 + q$$

نیز ک سا قہ کرنے سے h کو متعین کرنے کے لئے ایک کعبی مساوات حاصل ہوتی ہے لیکن اس مساوات کو بنانے کی ضرورت نہیں پڑے گی کیونکہ h کو سب سے زیادہ آسان طریقہ سے مساوات $2h = -f$ سے معلوم کیا جاسکتا ہے، جبکہ h کو سب سے پہلے ہارنر کے طریقہ سے حسب معمول دریافت کر لیا گیا ہو۔

آخر میں ک کا محسوب کرنا ضروری ہے اور اس کے ساتھ باقی دو اصلوں کا خواہ وہ خیالی ہوں یا حقیقی۔ اس مقصد کیلئے ذیل کا طریق عمل سہولت بخش ہوگا:-

سروں کے رقوم میں $2f$ (ع) کی قیمت $f^2 - 3q$ ہے معنی

$$f^2 (ع) + f^2 (h + k) + f^2 (h - k) = f^2 - 3q$$

$$f^2 (h + k) + f^2 (h - k) = 2f^2 (h) + k^2$$

$$f^2 (ع) + k^2 = f^2 - 3q$$

جس سے ک کو بہت تھوڑی محنت کے ساتھ معلوم کیا جاسکتا ہے کیونکہ $f^2 (ع)$ کی عددی قیمت ہارنر کے میل یافتہ عمل میں جو آخری استحالہ ہے اس میں آخر سے دوسرے سر سے

لکھی جاسکتی ہے۔ باقی دو اصلوں کی نوعیت اس طور پر حاصل شدہ عدد کی علامت پر منحصر ہوگی اور اس عدد کے مثبت اور منفی جذر المربع لینے سے خود انفسلیں معلوم ہو جائیں گی۔

مثالیں

۱۔ مسادات

$$لا^۲ + لا^۲ - لا^۲۳ - لا^۴۰ = ۰$$

کو حل کرو۔

سب سے پہلے مثبت حقیقی اصل معلوم کرو جو ہارنر کے طریقہ سے چار استحالوں کو مکمل کرنے سے حاصل ہوگی اور آخری استحالہ کے سر ہونگے۔

$$۴۴۳۳۱۸۹۶ - ۴۶۶۰۹۸۶۸۱۴۴۰۲۱$$

یہ ذہن نشین رکھو کہ اصلوں کو تین مرتبہ ۱۰ سے ضرب دیا گیا ہے ہم ف (ع) اور ف (ع) کی قیمتیں پہلی صورت میں داہنی طرف سے نو ہند سے اور دوسری صورت میں چہ ہند سے کاٹنے اور علامت اٹھا لگانے سے معلوم کرتے ہیں۔ بہتر یہ ہوگا کہ مختصر طریقہ سے تقرب کو اور دو منسلکوں تک لجا کر ف (ع) کی زیادہ صحیح قیمت معلوم کی جائے چنانچہ اس طور پر ہم حاصل کرتے ہیں

$$ف (ع) = ۴۶۶۲۸۶$$

اسکو ف^۲۔ ۲ ق (جو ۴۳ کے مساوی ہے) میں سے تفریق کرنے سے

$$۳۵۶۲۸۶ = ک^۲$$

اب چونکہ یہ منفی ہے اسلئے یہ ثابت ہو گیا کہ باقی دو اصلیں خیالی ہیں۔ ع کی حاصل شدہ قیمت ۵۱۳۴۵۴ سے ۵ کی قیمت فوراً ۳۵۶۲۸۶ لگائی ہے اور ۳۵۶۲۸۶ کو ۴ سے تقسیم کرنے اور اسکا مربع لینے سے بالآخر مسادات کی ملف اصلیں حاصل ہو جاتی ہیں جو یہ ہیں

$$1-1-0-9522 \pm 365642-$$

۲۔ نیوٹن کے کمبی (دیکھو دفعہ ۱۰۷)

$$0 = 5 - 2 - 2 - 2$$

کو پوری طرح حل کرو۔

ہارنر کے طریقہ سے چار استحالوں کی تکمیل کرنے اور مثال سابق کی طرح عمل کرنے سے ہم معلوم کرتے ہیں $0 = 5 - 2 - 2 - 2$ اور

$$11616.48 = (ع) ف$$

$$129.195 = ک$$

پس اور باقی دو اصلیں (جبکہ خیالی ہونا ثابت ہے) حاصل ہوتی ہیں

$$1-1-0-13592 \pm 16.2424-$$

۳۔ دفعہ ۱۰۹ صفحہ ۳۴۹ کی مثال ۱

$$0 = 100 - 2 - 2 - 2$$

کی باقی دو اصلیں معلوم کرو۔

ہم حاصل کرتے ہیں

$$166521.02 = ک، 646.821 = (ع) ف$$

اور مطلوبہ اصلیں ہیں

$$1-1-0-522 \pm 26322-$$

۴۔ مساوات

$$0 = 3 - 2 - 2 - 2$$

کو حل کرو۔

۲۰۔ تقسیم کرو اور مساوات $0 = 15 - 2 - 2 - 2$ کی وہ اصل

ہارنر کے طریقہ سے معلوم کرو جو صفر اور ایک کے درمیان واقع ہے

تو معلوم ہوگا کہ $0 = 646.821 - 2 - 2 - 2$ اور $0 = 166521.02 - 2 - 2 - 2$

اس لئے

$$0 = 646.821 - 2 - 2 - 2$$

پس ک ۲ = ۴۷۸۲۱، اور اسلئے باقی دو اصلیں حقیقی ہیں۔ ہم حاصل کرتے ہیں ۵ = ۳۷۶۹۸ اور ک کو جمع اور تفریق کرنے سے یہ دوسری اصلیں معلوم ہوتی ہیں ۶۸۶۵-۱۶ اور ۶۹-۶۳۱۴ (دیکھو مثال ۱۵ صفحہ ۳۰۲)۔
۵۔ لگراج کے کعبی

$$لا = لا + ۷ = ۷$$

کو پوری طرح حل کرو۔

تمام اصولوں کی علامتیں بدلوا اور احتمال شد مساوات ف (لا) = کی مثبت اصل ۷ معلوم کرو جو ۱۳ اور ۴ کے درمیان ہے تو
۷ = ۳۷۶۹۸۲۱ اور ف (۷) = ۳۷۶۹۸۲۱

پس ک ۱ = ۵۷۶۹۸۲۱ اور ک = ۱۶۷۸۲۱ - نیز ۵ = ۱۶۵۲۴۳۵۸ اور ان سے ۵ + ک اور ۵ - ک کی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں۔ اس طور پر حاصل کردہ سب اصولوں کی علامتیں بدلنے سے دی ہوئی مساوات کی اصلیں حاصل ہوتی ہیں

- ۳۷۶۹۸۲۱، ۱۶۵۲۴۳۵۸، (دیکھو مثال اوقہ ۱۱)

اوپر جو مثالیں دی گئی ہیں وہ یہ بتانے کے لئے کافی ہیں کہ اصولوں کی نوعیت کی قبل از قبل جانچ کئے بغیر کس طرح دئے ہوئے کعبی کو حل کیا جاتا ہے۔ یہ تصدیق کرنے کے لئے کہ کعبی کی دوسری دو اصلیں حقیقی ہیں یا خیالی جو محنت برداشت کرنی پڑتی ہے وہ اس محنت سے کچھ ہی زیادہ ہے جو اسٹرم کے مسئلہ کو استعمال کرنے میں لاحق ہوتی ہے اور وہ فرید محنت جو اصولوں کو واقعی طور پر معلوم کرنے کے لئے ضروری ہے بہت خفیف ہے۔ اب ہم چار درجہ مساوات پر غور کریں گے۔

۱۲۵۔ چار درجہ کا حل۔ جب چار درجہ کی اصلیں (دو یا چار)

حقیقی ہوں تو اسکو بھی دفعہ مابقی میں بیان کردہ طریقہ کے مشابہ طریقہ سے

حل کیا جاسکتا ہے۔ بعض مثالوں میں حقیقی اصل کے وجود کو فوراً پہچان لیا جاسکتا ہے اور جب اسی صورت ہو تو مساوات کے مکمل حل کے لئے طریقہ ذیل کا استعمال کرنا فائدہ مند ہوگا۔ فرض کرو کہ مجوزہ مساوات ہے

$$f(لا) = لا + ف + لا + ق + لا + ر + لا + س = ۰$$

اور اسکی حقیقی اصلیں ہیں عہ، یہ۔ باقی دو اصلوں کو $ھ + ک$ اور $ھ - ک$ سے تعبیر کیا جاسکتا ہے۔ یاد رہے کہ اس آخری زوج کے متعلق کسی قسم کا مفروض اختیار نہیں کیا گیا۔ فرض کرو کہ عہ اور یہ دونوں کو ہائر کے عمل سے محسوب کر لیا گیا ہے اور $f(عہ)$ اور $f(یہ)$ کی عددی قیمتیں بھی دفعہ مابقی کی طرح معلوم کر لی گئی ہیں۔ اسب اگر $f(لا)$ میں $لا$ کی بجائے $ھ + ک$ درج کیا جائے اور مثال ۲۶ صفحہ ۴۴ کا طریق حل استعمال کیا جائے تو بلا تکلف حاصل ہوتا ہے

$$-ک = \frac{f(ھ) = ۲ھ + ۳ف + ۲ھ + ۲ق + ھ + ر}{f(ھ) = ۲ھ + ۳ف}$$

پھر جیسا کہ ثابت کیا جا چکا ہے

$$f(عہ) + f(یہ) + f(ھ + ک) + f(ھ - ک) =$$

$$= f(۲ + ۳ق + ۲ھ + ۲ق + ھ + ر)$$

اور اسلئے $-ک = \frac{f(ھ + ک) + f(ھ - ک) = ۲ف + ۳(ھ + ک) + f(ھ) + f(ھ) + ۲ق + ۲ھ + ۲ق + ھ + ر}{f(ھ + ک) + f(ھ - ک) = ۲ف + ۳(ھ + ک) + f(ھ) + f(ھ) + ۲ق + ۲ھ + ۲ق + ھ + ر}$ اس ضابطہ کو $ک$ کے محسوب کرنے میں استعمال کیا جاسکتا ہے جبکہ $ھ$ کی قیمت پہلے سے ہی مساوات $عہ + یہ + ھ + ۲ = ۰$ سے حاصل کر لی گئی ہو۔ پھر اس کا تصفیہ ہو سکتا ہے کہ اصلوں کا دوسرا زوج خیالی ہے یا حقیقی بموجب اسکے کہ $ک$ منفی ہے یا مثبت۔

مثالیں

$$1-125-0.39 \pm 1, 32.48-$$

۳ - مساوات

$$2-11-13+11-19=0$$

کو حل کرو۔

اسکی دو اصلیں حقیقی ہونی چاہئیں، ایک (ع) مثبت اور دوسری (ب) منفی۔ ۲ سے تقسیم کرو اور مساوات کو اس شکل میں لکھو:-

$$f(x) = x^2 - 11x + 13 = 0$$

جب 'ف' (لا) = ۰ کی اصلوں کی علامتوں کو بد لکر، یہ محسوب کر لیا جائے تو 'ف' (ب) کی قیمت معلوم کر نیکے لئے ہارنر کے عمل سے حاصل شدہ آخری احتمال میں آخر سے جو دوسرا سر ہے اسکی علامت بدلتی جائے

$$x = 23.45 \pm 3.55 = 26.99$$

$$f(x) = 32.48 - 11x + 13 = 0$$

$$\frac{5.94}{1.514} = 3.92$$

اور خیالی اصلیں ہیں

$$1-125-0.39 \pm 1, 32.48-$$

۴ - مساوات

$$2-11-13+11-19=0$$

کو حل کرو۔

صرف ایک اصل منفی اور ایک کے درمیان ہے اور دوسری کا ۱۲ اور ۱۳ کے درمیان واقع ہونا آسانی کے ساتھ معلوم ہوتا ہے (دیکھو مثال ۴ دفعہ ۹۲)

$$x = 23.45 \pm 3.55 = 26.99$$

$$f(x) = 32.48 - 11x + 13 = 0$$

$$\frac{4.13}{5.34} = 0.77$$

اسلئے باقی دو اصلیں حقیقی ہیں اور آسانی کے ساتھ معلوم ہوتی ہیں ۲۰۲-۲۰۳ اور ۲۲ ۸۳ ۳۴۷۔

اس مساوات کی سب اصلوں کو ینگ نے ہارنر کے طریقہ سے محسوب کیا ہے (دیکھو، کیمی اور چاردرجی مساواتوں کی تحلیل اور حل صفحہ ۲۱۶ تا ۲۳۱) اور ہم نے آخر میں جو دو اصلیں حاصل کی ہیں وہ ینگ کے حاصل کردہ قیمتوں کے مطابق ہیں۔

۱۲۶۔ چاردرجی کا حل (گذشتہ سے پیوستہ) جب چاردرجی

کی سب اصلیں خیالی ہوں تو ظاہر ہے کہ دفعہ ماسبق کے حل کا طریقہ ناکام رہتا ہے۔ اس صورت میں اور عموماً اصلوں کی نوعیت خواہ کچھ ہی ہو طریقہ ذیل استعمال کیا جاسکتا ہے :-

فرض کرو کہ مساوات سب سے پہلے اسکی دوسری رقم کو خارج کر دینکے بعد شکل ذیل میں لکھی گئی ہے۔

ف (لا) = لا + ق لا + ر لا + س =
اسکی اصلوں کو $h \pm k$ ، $h \pm k$ ، $h \pm k$ ، فرض کیا جاسکتا ہے۔
یہاں اصلوں کی نوعیت کے متعلق کوئی مفروض اختیار نہیں کیا گیا ہے۔
آئیے نوعیت ک^۱ اور ک^۲ کو محسوب کر لینے کے بعد انکی علامتوں پر منحصر ہوگی۔ لا کی بجائے $h + k$ درج کرنے اور پہلے کی طرح حل کرنے سے

$$-k = \frac{6f(h) = 2h^2 + 2qh + r}{5h}$$

$$-k = 2h^2 + 2qh + \frac{r}{h}$$

جس سے ک معلوم ہوتا ہے جبکہ h ، معلوم ہو جائے۔ ک کو جب مثال ۲۶ صفحہ (۲۲۴) کی دو مساواتوں سے ساقط کیا جاتا ہے تو

۵ میں جو پچھ درجی حاصل ہوتا ہے وہ کبھی
 $۲ + ۲ ق + ۱ م$ (۲ - ۲ ق) - ۱ م = ۲ ہے۔ اس کبھی کی ایک
 اصل مثبت ہوتی چاہئے۔ باقی دو اصلیں دونوں مثبت، دونوں منفی،
 یا دونوں خیالی ہو سکتی ہیں بموجب اس کے کہ دئے ہوئے چار درجی
 کی اصلوں کی نوعیت کیا ہے۔ یہ مساوات فی الواقعہ زیر بحث
 چار درجی کے لئے (دیکھو مثال ۴ صفحہ ۱۸۳) تحول کبھی ہے (جسکی
 اصلوں کو ۴ سے ضرب دیا گیا ہے)۔ فرض کرو کہ اس کی مثبت اصل
 کو ہارنر کے عمل سے محسوب کر لیا گیا ہے (اگر تینوں اصلیں مثبت
 ہوں تو کسی ایک کا محسوب کرنا کافی ہے) اس طرح ۴ ۵ متعین
 ہو جاتا ہے اور اس سے ۵۔ پھر مجوزہ چار درجی کا پورا اصل ان دو
 ضابطوں سے ملتا ہے:-

$$۵ \pm \sqrt{\frac{۱}{۴} (۲ + ۲ ق + ۱ م)} - ۱ \pm \sqrt{\frac{۱}{۴} (۲ - ۲ ق - ۱ م)}$$

مثالیں

۱۔ مساوات

$$۱۰ + لا + ۱ = ۰$$

کا مکمل حل معلوم کرو۔
 اس مساوات کو مر فی (Murphy) نے (اپنی کتاب "مساواتوں
 نظریہ" صفحہ ۲۵ میں) اپنے اس مجوزہ طریقہ کی توضیح میں استعمال کیا ہے جو
 متوالی سلسلوں کی مدد سے مساواتوں کی خیالی اصلوں کو متعین کر نیک ہے
 یہیں فوراً تحول کبھی حاصل ہوتا ہے

$$۱۰ - ۱ - ۱ = ۰$$

اور ہارنر کے عمل سے اسکی مثبت اصل ۶۵۳۳۰.۱۸۴ ہے۔ پس ۵ کی قیمت معلوم ہو جاتی ہے اور اس سے $۵ = \pm ۱۶۲۵۸۶$ پھر ہم حاصل کرتے ہیں $\frac{1}{h} = \pm ۰.۶۶۹۴۵$ بموجب اسکے کہ h کی علامت مثبت یا منفی استعمال کی گئی ہو۔ ہر صورت میں جذرا لمرج کے تحت جو مقدار ہے وہ منفی ہے اور اس لئے سب اصلیں خیالی ہیں۔ ان کو آسانی کے ساتھ معلوم کیا جاسکتا ہے اور وہ یہ ہیں

$$1-16111111 \pm 162586 - 1-163352 \pm 162586$$

۲۔ مساوات

$$x^4 + 9x^2 - 6x + 5 = 0$$

کو حل کرو۔

اس مساوات پر "سپیٹزر" (Spitzer) نے بحث کی ہے
(Allgemeine Auflosung der Zahlen-

$$- = 34 - 161 + 118 + 1) (Gleichungen. p. 15.$$

اسکی مثبت اصل ۶۵۱.۹۴۲۴۹ ہے۔ پس $۵ = \pm ۰.۶۳۵۴۰$ اور اسلئے $\frac{1}{h} = \pm ۰.۶۳۵۴۸$ اور ہر صورت میں خواہ h کو مثبت لیا جائے یا منفی، جذرا لمرج کے تحت جو مقدار ہے وہ منفی ہے اور اسلئے

سب اصلیں خیالی ہیں۔ یہ چار اصلیں ہیں

$$1-162940.2 \pm 163544 - 1-1616523 \pm 163544$$

۳۔ مساوات

$$x^4 - 2x^2 - 10x + 1 = 0$$

کو حل کرو۔

دوسری رقم کے اخراج کے لئے اصلوں کو ۲ سے ضرب دو اور پھر ان کو بقدر ایک کے گھٹاؤ۔ احتمال شدہ مساوات کا محول کہیں آسانی کے ساتھ

حاصل ہوتا ہے

۲۔ ۶۸ + ۳۲۰ - ۲۵۶ = ۰ کی
اسکی اصلوں کو ۱۰ سے تقسیم کرو اور معلوم کرو کہ استعمال شدہ مساوات
ایک اصل ۶ اور ۷ کے درمیان ہے جو ہر نمبر کے عمل سے حاصل ہوتی
ہے ۶۵۲۹۸۳۸ - پس ۴۷ = ۶۲۵۹۸۳۸ اور ۵ = ۲۵۹۶۲۸ ±
اب خواہ ۷ کو مثبت لیا جائے یا منفی یہ معلوم ہوتا ہے کہ جذر الطربیع
کے تحت جو مقدار ہے وہ مثبت عدد ہے اور اسلئے اس صورت میں
تمام اصلیں حقیقی ہیں۔ چنانچہ ہم معلوم کرتے ہیں ۴ ک = ۲۰۸۴ - اور ۹۰
۴ ک = ۲۰۸۴ - پس ۴ ک = ۲۰۸۴ - اور ۵ - ۲۰۸۴ = ۰۵۹۶۲ ±
اب دوسری رقم کو خارج کرنے میں جو دو استعمالے عمل میں لائے گئے تھے
ان کو حساب میں شامل کر لینے سے مطلوبہ اصلیں حاصل ہوتی ہیں

۳۲، ۳۶، ۳۲، ۳۲، ۳۲، ۳۲، ۳۲، ۳۲
اس نتیجہ کی آسانی کے ساتھ تصدیق ہو سکتی ہے کیونکہ یہ دیا ہوا
تفاعل اجزائے ضربی لاء ۵ اور لاء ۲ کا حاصل ضرب ہے (مثال
۵ صفحہ ۳۱۴) کے ساتھ مقابلہ کرو۔

۴ - مساوات

$$لا - لا + لا - لا = لا + لا - لا$$

کو حل کرو۔

اس مثال پر جلینک (Jelinek) نے بحث کی ہے

Die Aufösung höheren numerischen Gleichungen, P. 29
کرنے کے لیے اصولوں کو ہم سے ضرب دو اور پھر بقدر ۷ کے گھٹاؤ۔ اس طریقہ سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$لا - لا + لا - لا = لا + لا - لا$$

جسکا محول کعبی ہے

۲۔ ۶۸ + ۳۲۰ - ۲۵۶ = ۰ کی
اسکی مثبت اصل کا محل کرنے کے لئے اصلوں کو ۱۰ سے تقسیم کرنا بہتر ہوگا

جس سے استحالہ مساوات کی ایک اصل کا ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہونا معلوم ہو جائیگا۔ ہارنر کے عمل سے یہ اصل حاصل ہوتی ہے ۵۹۱۔۲۶۔ اسلئے

$$۵۹۱ = ۲۰۵۶۹۱ \text{ اور } ۵۹۱ = \pm ۱۷۷۷۷۷۷۷$$

اب اگر ھ کو مثبت لیا جائے تو جذر المربع کے تحت جو مقدار ہے وہ مثبت ہے اور اس لئے دو اصل حقیقی ہیں۔ اگر ھ کو منفی لیا جائے تو جذر المربع کے تحت کی مقدار منفی ہے اور اسلئے دو اصلیں خیالی ہیں۔ پس دوسری رقم کو خارج کر نیکیے لئے جو دو استحالے عمل میں لانے پڑے ان کو حساب میں شامل کر لینے کے بعد مجوزہ مساوات کی چاروں اصلیں حسب ذیل حاصل ہوتی ہیں

$$۵۹۹۳، ۱۷۷۷۷۷۷۷، ۱۷۷۷۷۷۷۷، ۱۷۷۷۷۷۷۷$$

۵۔ مساوات

$$۵۹۹۳ + ۱۷۷۷۷۷۷۷ - ۱۷۷۷۷۷۷۷ - ۱۷۷۷۷۷۷۷ = ۵۰۰۰$$

کو حل کرو۔

(270)

یہ ینگ کی مساوات ہے جسکو دفعہ مابقی میں حل کیا گیا تھا۔ ہم اسکے حل کو اس دفعہ کے طریقہ سے مکرر معلوم کرتے ہیں تاکہ طالب علم کو اس محنت کا اندازہ ہو جائے جو دونوں طریقوں میں کرنی پڑتی ہے جب دوسری رقم آسانی کے ساتھ جدا ہو جائے (جیسا کہ اس مثال میں) یا جب دوسری رقم خود مساوات میں موجود نہ ہو تو یہ معلوم ہو گا کہ دفعہ ہذا کا طریقہ دفعہ مابقی کے طریقہ سے زیادہ آسان ہے۔ اصلوں کو بقدر ۲۰ کے گھٹانے سے استحالہ شدہ مساوات ہے

$$۵۹۹۳ + ۱۷۷۷۷۷۷۷ - ۱۷۷۷۷۷۷۷ - ۱۷۷۷۷۷۷۷ = ۲۵۴۶۰$$

جسکا محول کعبی ہے

$$۵۹۹۳ + ۱۷۷۷۷۷۷۷ - ۱۷۷۷۷۷۷۷ - ۱۷۷۷۷۷۷۷ = ۹۲۶۲۸۹$$

ہارنر کے عمل سے ۵۹۹۳ کی علامت کچھ ہی ہو جذر المربع کے تحت ۵ = ± ۱۷۷۷۷۷۷۷ کی علامت کچھ ہی ہو جذر المربع کے تحت کی مقدار مثبت ہے اور اسلئے چاروں اصلیں حقیقی ہیں جسکو معلوم کر نیکیے لئے

یہ دو ضابطے ہیں

$$1592.9 \pm 0.385 \sqrt{1592.9} \pm 0.385 \sqrt{1592.9}$$

پس ہر اصل میں ۲۰ جمع کرنے سے مجوزہ مساوات کی یہ چار اصلیں حاصل ہوتی ہیں

۴۲۵.۶-۳۶۳۸۳۲۱'-۶۳۵۱۱'۱۲,۶۵۶۵

۶۔ مثال ۴ صفحہ ۳۵۲ کی مسادات

$$= 1 \dots - 1140 + 113 - 11$$

کو پوری طرح حل کرو۔

اصلیں ہیں ۹۵۸۸۶۰ - ۱.۵۲۶.۹ - ۵۱۸۷۳۸ ± ۱۷۹۵۹۲۷

۷۔ مثال ۲ صفحہ ۳۱۳ کی مساوات

$$= 22 + 02 - 02 - 02$$

کو پوری طرح حل کرو۔

اصلیں ہیں ۳۵۳، ۳۶۲، ۳۷۱، ۳۸۰، ۳۹۰، ۴۰۰، ۴۱۰، ۴۲۰، ۴۳۰، ۴۴۰، ۴۵۰، ۴۶۰، ۴۷۰، ۴۸۰، ۴۹۰، ۵۰۰، ۵۱۰، ۵۲۰، ۵۳۰، ۵۴۰، ۵۵۰، ۵۶۰، ۵۷۰، ۵۸۰، ۵۹۰، ۶۰۰، ۶۱۰، ۶۲۰، ۶۳۰، ۶۴۰، ۶۵۰، ۶۶۰، ۶۷۰، ۶۸۰، ۶۹۰، ۷۰۰، ۷۱۰، ۷۲۰، ۷۳۰، ۷۴۰، ۷۵۰، ۷۶۰، ۷۷۰، ۷۸۰، ۷۹۰، ۸۰۰، ۸۱۰، ۸۲۰، ۸۳۰، ۸۴۰، ۸۵۰، ۸۶۰، ۸۷۰، ۸۸۰، ۸۹۰، ۹۰۰، ۹۱۰، ۹۲۰، ۹۳۰، ۹۴۰، ۹۵۰، ۹۶۰، ۹۷۰، ۹۸۰، ۹۹۰، ۱۰۰۰۔

۸۔ - مثال ۴ صفحہ ۳۲۱ کی مساوات

$$\cdot = 11 + 13 - 2 - 2 + 1$$

کو مل کرو۔

۱۸۔ اصولوں کو ۴ سے ضرب دو اور دوسری رقم کو خارج کرو۔ اس کے محمول کبھی پر ہار نہ کا طریقہ استعمال کرو تو معلوم ہو گا کہ اسکی ایک متوافق اصل ۱۸۰ ہے، پس ۵۲۳ = ۱۸۰ - حل کو آسانی کے ساتھ مکمل کیا جاسکتا ہے اور مجوزہ مساوات کی چار خیالی اصولوں کو یوں بیان کیا جاسکتا ہے

۹۔ مثال ۱۴، صفحہ ۳۷ کی مساوات

$$= 4.385 + 11.22 - 7$$

کی خیالی اعلیٰ معلوم کرو۔

جواب :- $1 - \sqrt{19}, 2 - 594 \pm 12, 3 - 33$

نوٹ (۱)

مساواتوں کا جبری حل

(271)

مساوات درجہ دوم کا حل عربوں کو معلوم تھا چنانچہ محمد بن موسیٰ اور نویں صدی کے دیگر مصنفین کی تصنیفات میں اس کا ذکر موجود ہے۔
 عمر خیام کا ایک مقالہ جبر و مقابلہ کے مضمون پر اس وقت موجود ہے جو شاید گیارہویں صدی کے وسط میں تحریر کیا گیا تھا۔ اس میں بھی مساواتوں کی جماعت بندی ہندسی عمل کے طریقوں کے ساتھ کی گئی ہے لیکن عام حل حاصل کرنے کی کوئی کوشش نہیں کی گئی۔ تیرہویں صدی کے شروع میں لیونارڈو (مقامی سا کا باشندہ) نے عربوں سے اس مضمون کی تحصیل کی اور اس کو اٹلی میں منتقل کیا اور اس وقت سے ایک عرصہ دراز تک اٹلی دے اس علم کے سرپرست رہے۔ لوکس پیاسیولس نے (جو لوکس ڈی برگو کے نام سے مشہور ہے) ایک کتاب "L'Arte Maggiore" کے نام سے ۱۵۹۴ء میں شائع کی۔ اس نے کبھی مساواتوں میں عربوں کی جماعت بندی کا متبع کیا اور یہ رائے ظاہر کی کہ اس علم کی موجودہ حالت کا لحاظ کرتے انکاح حاصل کرنا اتنا ہی ناممکن ہے جتنا دائرہ کی تزیج کرنا۔ لیکن اس کے ساتھ ہی وہ اس بات کا بھی اشارہ کرتا ہے کہ اس علم کی ترقی میں سب سے پہلا مسئلہ یہی ہو گا جسکی طرف علماء ریاضی کی توجہ منعطف ہوگی۔ مساوات $لا + م = ن$ کا حل سیپیو فیرو (Scipio Ferreo) نے معلوم کیا لیکن اس کے انکشاف کا حل کسی کو معلوم نہ ہو سکا سوال اس بات کے کہ اس نے اپنے طالب علم

فلاریڈو کو ۱۵۵۰ء میں اس حل سے آگاہ کیا۔ ٹارٹاگلیا (Tartaglia) کی توجہ اس مسئلہ کی طرف ۱۵۳۰ء میں منعطف ہوئی اور وہ بھی اس اس وجہ سے کہ کولا (colla) نے ایک ایسا مسئلہ تجویز کیا تھا جس کا حل $لا + ف = ق$ کی شکل کی کئی مساوات پر منحصر تھا۔ فلاریڈو کو جب اس بات کا علم ہوا کہ ٹارٹاگلیا نے اس مساوات کا حل حاصل کر لیا ہے تو اس نے $لا + م = ن$ کی شکل کی کئی مساوات کے حل کا جو اسکو معلوم تھا اعلان کر دیا۔ ٹارٹاگلیا کو اس کے بیان کی صداقت پر شبہ ہوا اور اس ۱۵۳۵ء میں اسکو دعوت مقابلہ دیدی اور اس اثنا میں خود بھی $لا + م = ن$ کا حل دریافت کر لیا۔ یہ حل لا کی بجائے

نات۔ $لا + م = ن$ فرض کرنے پر منحصر ہے جو دو جذور الکعبوں کے فرق پر مشتمل ہے۔ کارڈن کے نام سے جو حل منسوب کیا جاتا ہے وہ دراصل اسی حل کی بنیاد پر قائم کیا گیا ہے۔ ٹارٹاگلیا نے اپنی سعی کو جاری رکھا اور مختلف شکل کی کئی مساواتوں کو جو عرب مصنفین کی تقسیم کے تحت آتی تھیں حل کر نیکے لئے قوانین دریافت کئے۔ کارڈن نے جو ان قوانین کو حاصل کرنے کی فکر میں تھا ٹارٹاگلیا سے درخواست کی مگر ناکام رہا۔ آخر بہت کچھ منیت سماجت کے بعد ٹارٹاگلیا رضی ہوا اور اس نے ان قوانین کی تقسیم کی مگر ساتھ ہی کارڈن سے وعدہ لے لیا کہ وہ اس کو اپنے سینہ میں راز کے طور پر محفوظ رکھگا اور کسی کو اسکا علم نہ ہوئے دیگا۔ اپنے وعدہ کو بالائے طاق رکھکر کارڈن نے ٹارٹاگلیا کے قوانین کو اپنی عظیم الشان تصنیف "Ars Magna" میں ۱۵۴۵ء میں شائع کر دیا حالانکہ ٹارٹاگلیا کا ارادہ تھا کہ وہ ان کو اپنی تصنیف میں شائع کرے گا۔ اس نے اپنی تصنیف کی ابتدا ۱۵۵۱ء میں کی لیکن ۱۵۵۹ء میں کئی مساواتوں کی بحث پر پہنچنے سے پہلے ہی انتقال کر گیا۔ اب چونکہ اس کی تصنیف میں اس کے دریافت کردہ قوانین کا

ذکر موجود نہ تھا یہ قوانین امتدادِ زمانہ کی باعث کارڈن سے منسوب کئے جانے لگے اور ان کے انکشاف کا سہرا اسی کے سرِ باندھ دیا گیا۔ ظاہر ہے کہ اسکے بعد علماء جبر و مقابلہ کی توجہ فطرتاً درجہ چہارم کی مساواتوں کے حل کی طرف منطقت ہوئی اور یہاں بھی گویا ہی اسکا باعث ہوا کیونکہ اس نے مساوات

$$لا^۲ + ۶ لا + ۳۶ = ۶۰ لا$$

کو حل کرنے کی تجویز اُس وقت کے علماء کے سامنے پیش کی۔ کارڈن نے اس قسم کی مساواتوں کے لئے ایک ضابطہ حاصل کر نیکی سعی کی لیکن اسکا انکشاف اس کے طالب علم فیرارے (Ferrari) کی قسمت میں تھا۔ فیرارے نے جو طریقہ استعمال کیا تھا وہ ایک استحالہ یومی ہے جس سے مساوات کی طرفین کامل مربع بن جاتی ہیں۔ اس میں ایک نئی مقدار داخل کی جاتی ہے جو خود ایک تیسرے درجہ کی مساوات سے متعین ہوتی ہے۔ یہ فی الحقیقت خاصیت میں دفعہ ۶۳ کا طریقہ ہے اور اس کو بعض اوقات بومبلی (Bombelli) سے منسوب کیا جاتا ہے جس نے اسکو اپنے مقالہ جبر و مقابلہ میں ۱۵۴۹ء میں شائع کیا۔ سمسن کے نام سے جو حل مشہور ہے وہ اگرچہ بہت بعد (تقریباً ۱۸۰۰ء میں) شائع ہوا لیکن اصولاً کسی حال میں بھی فیرارے کے حل سے مختلف نہیں ہے۔ ۱۵۴۹ء میں ڈیکارٹ کا شہرہ آفاق رسالہ شائع ہوا جس میں علم جبر و مقابلہ کی بہت سی ترمیمات و اصلاحات درج ہیں۔ ان میں سے قابل ذکر یہ ہیں، مساواتوں کی منفی اور خیالی اصولوں کی جانچ اور اس کا علامتوں کا قانون۔ چار درجہ کو دو دو درجہ اجزاء کے حاصل ضرب کی شکل میں بیان کرنا اگرچہ فیرارے کی شکل سے آسانی کے ساتھ اخذ ہو سکتا ہے تاہم چار درجہ کے حل میں قابل قدر اضافہ ہے۔ یور کا جبر و مقابلہ ۱۵۴۵ء میں شائع ہوا۔ اس نے چار درجہ کا جو حل پیش کیا ہے (دیکھو دفعہ ۶۱) وہ اس لحاظ سے اہم ہے کہ اس کی شکل اور

کبھی کے حل کی شکل میں تطابق اور تشابہ پایا جاتا ہے کیونکہ دونوں صورتوں میں اصل کے لئے غیر منطقی جملہ فرض کر کے مساداتوں کو حل کیا جاتا ہے ڈیکارٹ اور پولر کے طریقے ان کو کوششوں کا نتیجہ ہیں جو انہوں نے مساداتوں کا عام جبری حل دریافت کرنے میں کی تھیں۔ اٹھارویں صدی میں علماء دریاخی نے اس مسئلہ پر بہت زور لگایا اور بڑی چھان بین کی مگر جو تھے درجہ سے اعلیٰ تر درجوں کی مساداتوں کی صورت میں انکی محنت کامیاب نہیں ہوئی۔

کبھی اور چار درجی کے جو حل علماء قدیم نے حاصل کئے انہیں دو جداگانہ طریقے ہمارے مشاہدہ میں آتے ہیں۔ پہلا وہ ہے جو لٹاؤ لگایا اور پولر کے مفروضات پر مبنی ہے اور جس کی ابتدا اصل کیلئے ایک غیر منطقی تصریحی شکل اختیار کرنے سے ہوتی ہے۔ دوسرا وہ ہے جس میں دئے ہوئے تفاعل کے ایک استعمال کی مدد سے اس بات کا کھوج لگایا جاتا ہے کہ آیا اس کے اجزائے ضربی کی نوعیت بدلی جاسکتی ہے تاکہ وہ ایسی شکل میں تحویل ہو جائے جو آسانی سے تحلیل ہو سکے۔ دفعہ ۵۵ میں یہ دونوں طریقے بیان کر دئے گئے ہیں اور ان کے ساتھ ایک تیسرے کا بھی ذکر کیا گیا ہے جسکو وائڈرمنڈ اور لکرائج نے دریافت کیا تھا۔ انہوں نے اپنی تحقیقاتوں کو اسی زمانہ میں شائع کیا تھا یعنی ۱۷۷۷ء اور ۱۷۷۸ء میں۔ ان میں سے وائڈرمنڈ ہی پہلا شخص تھا جس نے کسی مسادات کے جبری حل کی ضرورت خاصیت کو صاف طور پر واضح کیا جو یہ ہے کہ کسی مسادات کا جبری حل جذری علامات (جو اس میں شامل ہوتی ہیں) کے اجتماع کی وجہ سے اتمام اصلوں کو بلا امتیاز تعبیر کرنا چاہئے جبکہ اس میں شامل ہونے والے سرور کے تفاعلوں کی بجائے اصلوں کے متشکل تفاعل درج کئے جائیں (دیکھو دفعہ ۱۰۱)۔ کبھی اور چار درجی کی صورتوں میں اس نوعیت کے ضابطے حاصل کرنے میں اس کی کوششیں باہر اور ہوئیں لیکن

پانچ درجہ کی صورت میں ناکام رہیں۔ لگرائج نے اپنے پیش روؤں کی محنتوں کو جو مساواتوں کا عام حل دریافت کرنے میں صرف ہوئی تھیں انھیں استعمال کرنے اور ان پر نظر ثانی کرنے کا بیڑا اٹھایا اور ان سب کے نتیجوں کو ایک یکساں اصول میں منسلک کیا۔ یہ اصول اس بات پر مشتمل ہے کہ دی ہوئی مساوات کے حل کو ایک ایسی مساوات کے حل میں تبدیل کیا جائے جس کا درجہ دی ہوئی مساوات کے درجہ سے کم ہو اور جس کی ارضیں دی ہوئی مساوات کی ارضوں اور اکائی کے جذروں کے خطی تغاقل ہوں۔ وہ یہ بھی ثابت کرتا ہے کہ پانچ درجہ کو اس طرح تبدیل نہیں کیا جاسکتا کیونکہ وہ مساوات جس پر اس کا حل منحصر ہوتا ہے چھٹے درجہ کی مساوات ہے۔

اب چونکہ پانچویں درجہ کی مساوات کو حل کرنے کی تمام کوششیں رایگاں گئیں اسلئے علماء ریاضی کے دلوں میں فطرتاً یہ سوال پیدا ہوا کہ آیا اس کا حل ممکن بھی ہے۔ چنانچہ اہل اور وائنٹنرل نے ثابت کر دیا (دیکھو سیرٹ کی تصنیف Cours L'Algebre Supérieure) کہ چوتھے درجہ سے اعلیٰ تر درجہ کی مساوات کو جس کی شکل پر کوئی قید نہ ہو حل کر لینا ناممکن ہے۔ تاہم ایم۔ ہرمانٹ نے پانچ درجہ کی ایک مادرانی حل دیا ہے جس کی شکل (274) میں ناقصی تکمیل شامل ہوتے ہیں۔ لگرائج کی تحقیقاتوں کے بعد سے پانچ درجہ کی بحث میں جو دوسرے اضافے ہوئے ہیں ان میں سے اہم ایک یہ ہے کہ اسکو رسمی شکل میں (شیرن ہاسن کے) استعمال کی مدد سے بیان کیا جاسکتا ہے۔ شیرن ہاسن خود بھی ۱۸۲۳ء میں $M = F + Q + L + A$ کے مفروضہ کی مدد سے کعبی اور چار درجہ کی کوئی شکل کرنے میں کامیاب ہوا تھا اور قیاس لگایا تھا کہ اسی قسم کا عمل عام مساوات پر بھی استعمال ہو سکتا ہے۔ پانچ درجہ کی تذکرہ بالا سے رسمی تحويل کو مشر جیرارڈ نے ۱۸۲۲ء-۳۵ء میں شائع کیا اور ایم۔ ہرمانٹ کا بیان ہے کہ پانچ درجہ کی بحث میں یہ تحويل اہم ترین اضافہ

خصوصاً ایسی صورت میں جبکہ ایل نے یہ ثابت کر دیا تھا کہ اسکا حل ناممکن ہے۔ ایک مقالہ میں جس کو رابرٹ ہارلی نے کو ارٹری جرنل آف میٹھا میٹھس حصہ ششم صفحہ ۳۸ میں شائع کیا تھا اس بات کو ثابت کیا ہے کہ یہ تحویل پہلے ہی عمل میں آچکی تھی کیونکہ اسکو سویڈن کے ریاضی داں برنگ نے ۱۷۷۷ء میں حاصل کیا تھا۔ ڈاکٹر سلوسٹر کا تھا۔ بھی بہت اہم ہے جس کے ذریعہ سے پانچ درجی کو تین پانچوں درجہ والی رقموں کے مجموعہ کے طور پر بیان کیا جاتا ہے۔ یہ ایسی شکل ہے جو پانچ درجی کو استعمال کرنے میں بڑی سہولت پیدا کرتی ہے۔ پانچ یا اس سے زیادہ درجہ والی مساواتوں کی بحث میں جو اور اضافے زمانہ حال میں ہوئے ہیں وہ زیادہ تر ان اشکال کے ہم متغیروں اور غیر متغیروں سے متعلق ہیں۔ ان تحقیقاتوں کا کچھ ذکر اس تصنیف کی دوسری جلد میں ہے لیکن اور زیادہ تحقیق سے کام لینا ہے تو

طالب علم کو Clebsch کی "Theorie der binaren algebraischen

اور سامن کی "Lessour Introductory to the Modern Higher

Algebra کا مطالعہ کرنا چاہیے۔

نوٹ (ب)

(275)

عددی مساواتوں کا حل

عددی مساواتوں کی اصلوں کو تفصیلی طور پر معلوم کرینکی پہلی سعی جو کیگٹی اسکودیٹا نے ۱۶۷۱ء میں شائع کیا۔ اس سے پہلے کارڈن نے کبھی پر ”محل باطل“ (جسکو وہ *regula aurea* کہتا ہے) کا قانون جاری کیا تھا مگر اس طریقہ سے جو نتیجے حاصل ہوئے انکی کوئی قدر و قیمت نہیں۔ دیٹا کو خیال ہوا کہ دی ہوئی مساوات کی کسی خاص عددی اصل کو ایسے طریقہ سے حاصل کرنا ممکن ہے جو جذر المربع اور جذر اللعب نکالنے کے معمولی اعمال کے مشابہ ہے۔ پھر اسکے دل میں یہ سوال پیدا ہوا کہ ان معلومہ عملوں میں کس قسم کی ترمیم ہونی چاہئے کہ ان کی مدد سے مساوات کی اصل حاصل ہو سکے جبکہ مساوات کے سر دیئے ہوئے اعداد ہوں۔ مساوات $f(x) = 0$ کی لیکر جہاں f دیا ہوا عدد ہے اور $f(x)$ ایک کثیرالار قام ہے جس میں x کی مختلف قوتیں شامل ہیں دیٹا نے یہ ثابت کیا کہ $f(x)$ میں اصل کی معلومہ تقریبی قیمت درج کرنے سے اصل کا دوسرا ہندسہ (جو کسر اعشاریہ میں بیان کیا گیا ہو) عمل تقسیم سے حاصل ہو سکتا ہے۔ جب یہ قیمت حاصل ہو جائے تو اس عمل کو دہرانے سے اصل کا ایک اور ہندسہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔ دس علی ہذا یہ یہ امر غور طلب ہے کہ اس طریقہ کا اصول اس خاص اصول کے حامل ہے جو نیوٹن اور ہارنر کے تقرب کے طریقوں میں مضمر ہے۔ (دیکھو صفحات

۱۰۷۱-۱۰۸۰)۔ ویٹاکے بعد سے جو کچھ اس طریقہ میں اضافہ ہوا ہے وہ صرف عمل حساب کو اس طور پر ترتیب دینا ہے کہ اصل کے معلوم کرنے میں صحت اور آسانی پیدا ہو جائے ورنہ اصولاً کوئی اختلاف نہیں ہے۔ اس باب میں کس قدر بڑی ترقی ہوئی ہے اسکا اندازہ مانٹوکلا (Montucla) کے بیان سے بخوبی ہو سکتا ہے جو اس کی تصنیف

تاریخ ریاضیات (Histoire des Math. جلد اول صفحہ ۶۰۳ میں درج ہے)۔ ویٹاکے طریقہ تقریب پر بحث کرتے ہوئے وہ کہتا ہے کہ چار درجہ کی اصل کو اعشاریہ کے گیارہ مقامات تک معلوم کرنے کا عمل حساب (جسکو ویالس (Wallis) نے پورا کیا) از حد صبر آزما کام ہے لیکن اب وہی عمل حساب بہت آسانی کے ساتھ ہر وہ شخص کر سکتا ہے جس نے ہارنر کے طریقہ میں مہارت حاصل کی ہو۔

نیوٹن کا تقریب کا طریقہ ۱۶۶۹ء میں شائع ہوا لیکن اس کے قبل ویٹاکا کا طریقہ استعمال کیا جاتا تھا جسکو ہپاریو، آٹریڈ، پیل اور دوسروں نے کچھ آسان بنا دیا تھا۔ نیوٹن کے بعد سیمپسن اور برنولی نے خود کو اس مسئلہ کی طرف متوجہ کیا۔ چنانچہ اسکا نتیجہ یہ ہوا کہ ویٹاکے برنولی مساوات کی اصل کو متوالی سلسلہ کی شکل میں بیان کرنے میں کامیاب ہوا اور یولر نے بھی اصل کے لئے اسی قسم کا جملہ حاصل کیا۔ لیکن یہ دونوں طریقے لگراج کے بیان کی بموجب اسی طرح بھی نیوٹن کے حل سے اصولاً مختلف نہیں ہیں۔

(276)

پس لگراج کے زمانہ تک عددی مساوات کی اصل کو تقریبی طور پر حاصل کرنے کا صرف ایک طریقہ تھا اور یہ طریقہ جسکو بالا خر ہارنر نے مکمل کیا اتنا بہترین طریقہ چلا آتا ہے۔ لگراج نے کتاب محلول بالا میں نیوٹن اور ویٹاکے طریقوں کے تقاض کو واضح کیا ہے۔ ویٹاکے طریقہ کا حوالہ دیتے ہوئے وہ کہتا ہے کہ اس میں بہت سی آزمائشوں کا سامنا کرنا پڑتا ہے اور

اس پر اعتماد نہیں کیا جاسکتا جب تک کہ مساوات $f(x) = 0$ کی دائیں جانب کی تمام رقیں مثبت نہ ہوں۔ نیوٹن کے طریقہ میں وہ یہ تقاضا کرتا ہے:۔ اول، اس سے متوافق اصل محدود رقوموں میں حاصل ہو نہیں سکتی۔ دوم، عمل میں یہ خوف کہ کہیں ہرئی تصحیح درست ہے یا نہیں۔ بالآخر، اس مساوات کی صورت میں اس طریقہ کی ناکامی جسکی اصلیں تقریباً مساوی ہوں۔

لگرانج نے جس مسئلہ کو اپنے لئے پیش کیا وہ یہ تھا:۔
 ”اگر ایک عددی مساوات دی گئی ہو جس کی اصلوں کی نوعیت اور قیمتوں کے متعلق پہلے سے کچھ بھی معلوم نہیں ہے تو ان اصلوں کی ممکن ہو تو ٹھیک ٹھیک قیمت دریافت کرنا یا ہر اصل کی تقریبی قیمت تقرب کے مطلوبہ درجہ تک معلوم کرنا۔“
 اس مسئلہ کو اس نے حل کرنے کی جو کوشش کی ہے اسکا ذکر کرنے سے پیشتر یہ دیکھنا ضروری ہے کہ متذکرہ بالا تقرب کے طریقوں کے علاوہ اس سمت میں کونسی باتیں معلوم ہو چکی تھیں۔ ہیریٹ نے ۱۶۳۱ء میں مساوات کی ترکیب کو اجزاء ضربی کے حاصل ضرب کی صورت میں معلوم کیا تھا اور وہ روابط دریافت کر لئے تھے جو اصلوں اور سروں کے درمیان ہیں۔ وہ پٹائے کعبی کی صورت میں ان روابط کو اس سے پہلے معلوم کیا تھا لیکن وہ عام صورت میں کوئی ایسا نتیجہ اخذ نہ کر سکا جیسا کہ ہیریٹ نے حاصل کیا۔ یہ انکشاف اہم تھا کیونکہ اس سے اس بات کا پتہ چلا کہ صحیح اصل کو مساوات کی مطلق رقم کا جزو ضربی ہونا چاہئے اور ایسی اصلوں کو متعین کرنے کے لئے نیوٹن کا مقسوم علیہم کا طریقہ اسکا لازمی نتیجہ صریح تھا۔ پس اصلوں کے حدود معلوم کر کے طرف علماء ریاضی کی توجہ معطفت ہوئی تاکہ مقسوم علیہم کے طریقہ اور تقرب کے دوسرے موجودہ طریقوں میں جو محنت کرنی پڑتی تھی وہ کم ہو جائے جیسا کہ پہلے بیان کر دیا گیا ہے ڈیکارٹس پہلا

تخص تھا جس نے مساواتوں کی منفی اور خیالی اصولوں کو پہچاننے کے لئے ایک معیار دریافت کیا۔ نیز کسی دی ہوئی مساوات کی حقیقی اور خیالی اصولوں کی تعداد متعین کرنے کے متعلق جس تحقیق کی اس نے ابتدا کی اسکو اسٹرلنگ ڈی گوا اور دوسرے علماء نے جاری رکھا۔

لگراج نے غور کیا کہ متذکرہ صدر مسئلہ کو حل کرنے میں سب سے پہلے دی ہوئی مساوات کی حقیقی اصولوں کی تعداد متعین کرنا اور انکو ایک دوسرے سے جدا کرنا ضروری ہے۔ اس مقصد کے لئے اس نے اس مساوات کا استعمال کرنا تجویز کیا جس کی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصولوں کے فرقوں کے مربع ہوں۔ ویرنگ نے اس سے پہلے ہی اصولوں کو جدا کر نیکایہ طریقہ ظاہر کیا تھا لیکن لگراج کا بیان ہے [عددی مساواتیں نوٹ سوم] کہ جو وقت وہ اس مضمون پر اپنی یادداشت لکھ رہا تھا وہ ویرنگ کی تحقیقاتوں سے ناواقف تھا اب یہ ظاہر ہے کہ جب فرقوں کی مساوات بنجاتی ہے تو اسکی مثبت اصولوں کی سفلی حد معلوم کر کے وہ عدد معلوم کرنا ممکن ہے جو دی ہوئی مساوات کی اصولوں کے فرقوں میں سے سب سے چھوٹے فرق سے کم ہو۔ پھر علی التواتر ان عددوں کو درج کرنے سے جو اس مقدار سے تھوڑا فرق رکھیں دی ہوئی مساوات کی اصولوں کو جدا کیا جاسکتا ہے۔ جب اس طور پر اصلیں جدا ہو جائیں تو لگراج کی تجویز ہے کہ انہیں سے ہر ایک کو مسلئ سوسر کے طریقہ سے جس کی تشریح اس کتاب میں (صفحہ ۱۱۲) کر دی گئی ہے معلوم کیا جائے۔ اصولوں کو معلوم کر نیکایہ طریقہ اس اعتبار سے بچ جاتا ہے جو نیوٹن کے متذکرہ بالا طریقہ پر وارد ہوتا تھا چنانچہ اس طریقہ سے ہر تقریب میں خطا کی مقدار معلوم ہوتی ہے اور جب اصل متوافق ہو تو عمل خود بخود رک جاتا ہے اور اصل محدود شکل میں معلوم ہوتی ہے۔ لگراج نے مساواتوں کی خیالی اصولوں کو حاصل کرنے کے طریقے بھی دکھائے ہیں اور یہ بھی بتایا ہے کہ اگر مساوات میں

مساوی اصلیں ہوں تو انکو سب سے پہلے موجودہ طریقوں سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

فطری طور پر لگرائج نے اپنے لئے جو مسئلہ تجویز کیا تھا اس کا حل متذکرہ بالا تحریر کی رو سے مکمل ہے۔ لیکن عملی طور پر جہاں تک اسکا تعلق ہے وہ محض بیکار ہے۔ کیونکہ جو تھے درجہ کی مساوات کے لئے ہی فرقوں کی مساوات بنانا بہت محنت طلب ہے اور اعلیٰ تر درجہ کی مساواتوں کے لئے قریب قریب ناممکن العمل۔ اگر ہم اصولوں کو جدا کر نیکے وہ آسان ترین طریقے بھی لگرائج کے بقیہ عمل کے ساتھ کام لائیں جو لگرائج کے بعد معلوم کئے گئے ہیں تو بھی اس عمل پر یہ اعتراض وارد ہوتا ہے کہ اس سے اصل مسلسل کسر کی شکل میں حاصل ہوتی ہے اور اسکو اس شکل میں حاصل کرنے کے لئے جو محنت درکار ہے وہ اس محنت سے کہیں زیادہ ہے جو اصل کو اعشاری شکل میں حاصل کر نیکے لئے ہارنر کے عمل میں کرنی پڑتی ہے۔ یہ بھی ظاہر ہے کہ یہ آخر الذکر عمل اس مکمل شکل میں جسکو ہارنر نے پیش کیا ہے ان تمام اعتراضات سے بری ہے جو نیوٹن کے طریقہ پر وارد ہوئے ہیں۔

لگرائج کے بعد ویٹا اور نیوٹن کے تقریب کے طریقوں میں ہارنر کی ترمیم کے علاوہ عددی مساواتوں کی تحلیل میں فوریر، بوڈان اور اسٹرم نے نہایت اہم اضافے کئے ہیں۔ بوڈان کی تحقیقات ۱۸۰۰ء میں شائع ہوئی اور فوریر کی اسکے انتقال کے بعد ۱۸۳۱ء میں اس میں شک نہیں کہ بوڈان کی تصنیف سے پہلے ہی فوریر نے وہ مسئلہ معلوم کر لیا تھا جو اس کتاب میں ایک ساتھ دونوں کے نام سے موسوم کیا گیا ہے۔ اسٹرم کی تحقیقات ۱۸۳۵ء میں شائع ہوئی۔ ان مصنفین نے اصولوں کو جدا کر نیکے جو طریقے بیان کئے ہیں انکو پوری طرح اس کتاب میں واضح کیا گیا ہے (دسواں باب)۔ ان طریقوں کو ہارنر کے طریقہ کے ساتھ شامل کرنے سے ہمیں لگرائج کے مسئلہ کا وہ حل مل جاتا ہے جو خود لگرائج کے

مجوزہ حل سے کہیں زیادہ آسان ہے۔ نیز اس سمت میں اس سے زیادہ سہولت پیدا کرنا ناممکن نظر آتا ہے۔ مساوات کی اصل دریافت کریمتیں محنت سے بجا اسی طرح محال ہے جس طرح جذر المربع یا جذر اللعب نکالنے کے عمل میں۔ یہ اور بات ہے کہ ہارنر کا عمل اس محنت کو حتی الامکان گھٹا دیتا ہے۔ اصولوں کو جد کرنے میں بھی خصوصاً اس وقت جبکہ دو یا زیادہ اصلیں تقریباً مساوی ہوں کم یا زیادہ محنت کرنا پڑے گی۔ اس محنت میں کچھ تخفیف ہو سکتی ہے اگر سروں کے تفاعلوں پر جو مساواتوں کے نظریہ میں اس قدر اہم حصہ ملتے ہیں کافی غور کر لیا جائے۔ مثلاً اگر تفاعلوں 'ھ' اور 'جے' کو دئے ہوئے چار درجہ کیلئے محسوب کر لیا جائے تو اصولوں نوعیت کا نوراً معلوم کر لینا ممکن ہے (دیکھو دفعہ ۶۸)۔ ممکن ہے کہ آئندہ کسی زمانہ میں علماء ریاضی اصولوں کو جد کر نیکا کوئی آسان طریقہ ایجاد کر سکیں جس طرح فی زمانہ سادہ اصولوں کو لوکارٹم کے ذریعہ محسوب کیا جاسکتا ہے لیکن فی الحال لگراج کے مسئلہ کا مکمل ترین حل وہی ہے جو اسٹرم اور ہارنر کے طریقوں کو ملانے سے پیدا ہوتا ہے۔

اوپر جو کچھ بیان کیا گیا وہ صرف عددی مساواتوں کی حقیقی اصولوں صادق آتا ہے۔ ہم نے صفحہ ۳۹۵ کے حاشیہ میں ان کتابوں کا حوالہ دیدیا ہے جنہیں خیالی اور ملحق اصولوں کو محسوب کر نیکے عام طریقے دریافت کرنے کی کوششیں کیں گئی ہیں اور دفعات ۱۲۴ اور ۱۲۵ میں یہ بتا دیا ہے کہ تیسرے اور چوتھے درجہ کی عددی مساواتوں کی صورت میں ان اصولوں کو آسان ترین طریقہ سے کس طرح محسوب کیا جاسکتا ہے۔

نوٹ (ج)

[279]

اس مسئلہ پر کہ ہر مساوات کی ایک اصل ہوتی ہے

دفعات ۱۲۲ اور ۱۲۳ میں جو مسئلہ زیر بحث رہا ہے اُس کے سلسلہ میں یہ ضروری ہے کہ جو کچھ ثابت ہوا وہ واضح طور پر ذہن میں رہے اور جو ثابت ہونا ممکن ہے اسکو اچھی طرح ذہن نشین کیا جائے۔ اگر مساوات

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$$

میں سرورں a_1, a_2, \dots, a_n کو صرف جبری علامات کی طرح بغیر کسی قید کے استعمال کیا جائے یعنی اگر یہ سر کسی قسم کی قید کی پابندی نہ کریں جو حقیقی اعداد یا بارہویں باب میں بحث کردہ ملحق اعداد ہونے سے متعلق ہو تو ایسی مساوات کی صورت میں یہ ثابت نہیں ہوا ہے اور نہ اسکا ثبوت موجود ہے کہ ہر مساوات میں ایک اصل ہوتی ہے۔ وہ مسئلہ جو ثبوت پذیر ہے یہ ہے کہ n ویں درجہ کی کسی منطقی صحیح مساوات کی صورت میں جس کے سر سب کے سب ملحق و بشمول حقیقی اعداد ہیں n ملحق اعداد موجود ہوتے ہیں جو اس مساوات کو پورا کرتے ہیں۔ چنانچہ اصطلاحات عدد اور عددی کو بارہویں باب کے وسیع معنوں میں استعمال کرنے سے زیر بحث مسئلہ کو زیادہ صحت کے ساتھ اس شکل میں بیان کیا جاسکتا ہے:-

ان ویں درجہ کی ہر عددی مساوات میں n عددی صلیبوں کی ہیں۔
 جہاں تک اس مسئلہ کا تعلق ہے اس میں کوئی شبہ نظر نہیں آتا کہ بالکل
 سیدھا اور باقاعدہ ثبوت وہ ہے جو خیالی جملوں یا بارہویں باب میں بحث
 میں آئے ہوئے ملتف عددوں کو استعمال کرنے پر منحصر ہے۔ ملتف
 عددوں کو منہوی کے نقطوں کے ذریعہ تعبیر کر نیک خیال سب سے پہلے
 آرگنڈ کے ذہن میں آیا تھا جس نے سلسلہ نمبریں بغیر اپنا نام ظاہر کئے ایک
 تصنیف شائع کی جو

Essai sur une maniere de représenter les quantites imaginaires dans les constructions geometriques.

کے نام سے موسوم ہے اس تصنیف نے چن سال بعد جرمان کی
 "Annales" میں اپنی تحقیقاتوں کا ذکر کیا ہے۔ انہیں شک نہیں کہ آرگنڈ
 نے اپنے نئے طریقوں کی شہسیر میں بہت کچھ کوشش کی لیکن ان پر بہت کم
 توجہ کی گئی اور ایک مدت کے بعد انہی طریقوں کو انگلستان میں دارن
 نے اور فرانس میں مورے نے بلا واسطہ دریافت کیا۔ ان معلومات کا
 گاؤس نے اپنی کتابوں میں جو سلسلہ ۱۸۳۱ء میں شائع ہوئیں اضافہ کیا اور کوشی
 نے ان طریقوں کو دفعہ ۱۲۱ کے اہم مسئلہ کے ثبوت میں استعمال کیا۔ اس
 مسئلہ کے سلسلہ میں جواب زیر بحث ہے اسکا وہ ثبوت جو ہم نے دفعہ ۱۲۳
 میں دیا ہے فی الحقیقت اس ثبوت کی ترمیم ہے جو آرگنڈ کے اصلی مقالہ
 میں پایا جاتا ہے اور جس کو کوشی نے اپنی کتاب *Exercices d'Analyse*
 میں دہرایا ہے۔ ایک ثبوت جو بہت سی باتوں کا لحاظ کرتے متذکرہ بالا
 ثبوت کے مشابہ ہے مرتے نے بھی دیا ہے۔

ملتف عددوں کی ہندسی تعبیر دریافت ہونے سے بیشتر مختلف
 علماء ریاضی مساواتوں کی اصولوں کی نوعیت کا مسئلہ حل کرنے میں مصروف
 رہے۔ لگرائج نے اپنی کتاب "عددی مساواتوں" نوٹ ہنم میں ان کی
 تحقیقاتوں کا ذکر کیا ہے۔ ان محققین کی فہرست میں ڈامبرٹ، ڈیکاٹ،
 یولر، فونسنیکس اور لاپلاس شامل ہیں جنہی توجہ صرف ایسی مساواتوں پر

مرکوز رہی ہے جن کے سر منطبق تھے اور انکے پیش نظر یہ مقصد تھا کہ اجزائے ضربی لا۔ عہ لا۔ یہ وغیرہ کے وجود کو تسلیم کر کے یہ بتایا جائے کہ اصلیں سب ہی سب یا تو حقیقی ہیں یا لا + ب یا لا - آ کے نمونہ کی خیالی مقداریں۔ یہ الفاظ دیگر حقیقی عددی سروں والی مساوات میں خیالی اصل کی کوئی اور شکل سوائے لا + ب یا لا - آ کے نہیں ہو سکتی جس میں لا اور ب حقیقی مقداریں ہیں۔ اس مسئلہ کے ثبوت کے لئے عام طور پر جو طریقہ رائج تھا وہ یہ ثابت کر نیکے لئے تھا کہ اس مساوات کی صورت میں جسکے درجہ میں کسی قوت ک میں شامل ہوتا ہے اس کے دو درجہ جزو ضربی کے وجود کا امکان ایسی مساوات کے حل پر منحصر کیا جاسکتا ہے جس کے درجہ میں صرف قوت ک - ا میں شامل ہو اور اس عمل سے مسئلہ کو تحویل کر کے اسکو اس معلومہ اصول پر منحصر کر دیا جائے جو یہ ہے کہ طاق درجہ کی ہر مساوات جس کے سر حقیقی ہیں ایک اصل رکھتی ہے۔ اس مضمون پر لگ کر رائج نے جو تحقیقاتیں کی ہیں مذکورہ بالا کتاب میں درج ہیں۔ انکا تعلق صرف ایسی مساواتوں سے ہے جسکے سر حقیقی ہوں۔ اور یہ بالآخر اسی اصول پر آکر ٹکیتی ہیں جو اوپر مذکور ہوا یعنی حقیقی سروں کے ساتھ طاق درجہ کی مساوات میں ایک حقیقی اصل موجود ہوتی ہے۔

اسی اصول (یعنی طاق درجہ کی مساوات میں ایک حقیقی اصل کا وجود) پر منحصر کر کے اس مسئلہ کو حل کر نیکے دو طریقے حال ہی میں شائع ہوئے ہیں۔ ایک وہ ہے جو پروفیسر کلفرڈ کا ہے (دیکھو اسکے تھیمائیٹل پیپرز صفحہ ۲۰ اور گیمبرج کی فلائیفل سوسائٹی کی رولڈا جلد دوم صفحہ ۱۱۷ اور دوسرے طریقہ مائٹا کا ہے دیکھو "Translations of the Royal Irish Academy" ۲۶ ویں جلد صفحہ ۴۵۳) اور دوسری مساوات سے لے کر کے دونوں صنفوں کا اسقاط کا طریقہ استعمال کرتے ہیں تاکہ م (۲-۱) ویں درجہ کی مساوات حاصل ہو جائے جس کے حل پر مجوزہ مساوات کی ایک اصل کے وجود کا منحصر ہونا ثابت کیا جاتا ہے اور چونکہ عدد م (۲-۱) میں جزو ضربی ۲، عدد م کی بہ نسبت ایک

مرتبہ کم شامل ہوتا ہے یہ مسئلہ بالآخر تذکرہ بالا طریقوں کی طرح طاق درجہ کی مساوات میں ایک اصل کے وجود کے اصول پر منحصر ہو جاتا ہے۔ وہ دو مساواتیں جن کے درمیان عمل استقاط جاری ہوتا ہے م دیں اور (م-۱) دیں درجہ کی ہیں اور ان طریقوں کے طرز ثبوت کے درمیان جو فرق ہے وہ صرف ان مساواتوں کو حاصل کر نیکے طرز کے لحاظ سے ہے۔ میالٹ کے طریقہ میں ان مساواتوں کو مجوزہ مساوات کے سادہ استعمال سے ذریعہ حاصل کیا جاتا ہے اور برڈیسٹر کلفرڈ ایک حقیقی دو درجہ جزو ضربی سے دئے ہوئے کثیر الارقام کو تقسیم کر کے جو باقی رہتا ہے اس کے ہر دو کو ضفر کے مساوی رکھ کر ان کو حاصل کرتا ہے۔ ان سروں کی عام شکلیں اس کتاب کی دوسری جلد میں مقطعات کے باب کے آخر کی متفرق مثالوں میں ملیںگی اور وہاں یہ بات آسانی سے معلوم ہوگی کہ اس طور پر حاصل کردہ مساواتوں سے بہ کو ساقط کرنے سے عہ میں ایک مساوات ملتی ہے جس کا درجہ (م-۱) ہے۔ (دیکھو مثال ۳۸ صفحہ ۱۰۱ جلد دوم)۔

تمت

۷۸۶

اشاریہ

مساواتوں کا نظریہ

جلد اول

- نوٹ :- اعداد سے صفحات کا حوالہ دیا گیا ہے -
- اخراج ، رقموں کا ، ۹۴
- آرگنڈ ، ۴۲۲
- استعمال ، مساواتوں کا ، ۸۴
- کعبی کا ، ۱۰۱
- چار درجہ کا ، ۱۰۳
- ہم رسم ، ۱۰۶
- متشاکل تفاعلوں کے ذریعہ ، ۱۰۸
- بالعموم ، ۱۱۴
- اسٹرم ، اسکا مسئلہ ، ۲۹۷
- مساوی اصولوں کیلئے ، ۳۰۷
- اسکے مسئلہ کا اطلاق ، ۳۱۱
- اسکے مسئلہ پر مثالیں ، ۳۲۲ ، ۳۲۳ ، ۳۷۵

- اصلیں، متعلقہ مسائل، ۲۴
 خیالی، ۲۷
 تعداد، ۲۸
 مساوی، ۳۲
 ڈیکارٹ کا قاعدہ مثبت اصولوں کے لئے، ۳۶
 منفی اور خیالی اصولوں کے لئے، ۳۸
 سروں کے ساتھ رشتہ، ۳۵
 اکائی کے جذر الکعب، ۵۸
 انکے متشاکل تفاعل، ۶۳، ۲۴۵
 ضعیفی، ۲۳۵، ۳۳۶
 انکی انتہائیں، ۲۶۹
 انکو جدا کرنا، ۲۸۳
 متوافق، ۳۲۷
 انکا تقرب، ۳۴۱، ۳۴۳
 انیسر کو شے کا مسئلہ، ۳۸۹
 ملحق اصلیں معلوم کرنا، ۳۹۴
 ہر مسادات کی ایک اصل ہوتی ہے، ۳۹۲، ۴۲۱
 اعداد، ملحق، ۲۸، ۳۷۷
 اعظم اور اقل قیمتیں، ۲۳، ۲۳۰
 انتہائیں، اصولوں کی، تعریفات، ۲۶۹
 انیسر مسئلہ، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۶
 مفی انتہائیں اور منفی اصولوں کی انتہائیں، ۲۷۹
 انتہائی مساداتیں، ۲۷۹
 برٹک، ۴۱۴
 بن موسیٰ، ۴۰۹

بنیادی مسئلہ، ۳۹۱
کوششی کے مسئلہ سے ماخوذ، ۳۹۲

دوسرا ثبوت، ۳۹۲

تاریخی نوٹ، ۴۲۱

بوڈان کا مسئلہ، ۲۸۴

۴۱۱

بومبلی، اسکی خاص شکل کا حل، ۱۵۳

اسٹرم کے بانی جبکہ دوسری رقم موجود نہ ہو، ۳۷۴، ۳۷۵

اسکے حل کا عدم امکان، ۴۱۲

پیرسر، اسٹرم کے تفاضلوں پر، ۳۲۵

تشریحی تعبیر، ۱۸

کثیر رشتہ کی، ۱۸
مشفق تفاضلوں کی، ۲۲۹

ملفق اعداد کی، ۳۷۷

تفاضلوں کی جدول، ۱۶

تقرب، عددی اصولوں کا:

نیوٹن کا طریقہ، ۳۴۱

ہارنر کا طریقہ، ۳۴۳

لگرانج کا طریقہ، ۳۶۵

ہارٹا گلیا، ۴۱۰

شنائی سر، ۹۶

شنائی مساداتیں، حل، ۱۳۰

خواص، ۱۳۴

حل، دائری تفاضلوں کے ذریعہ، ۱۴۳

حل، گاس کے طریقہ سے، ۱۴۹

- جبری مساداتیں، ۲، ۳۲۶
 انکامل، ۱۵۵
 کعبی کا حل، ۱۵۹
 چار درجی کا حل، ۱۷۷
 تاریخی نوٹ، ۴۰۹
 جذر الکعب، اکائی کے، ۵۸
 چار درجی، ۱۰۳
 یولر کا حل، ۱۷۷
 فیاری کا، ۱۹۰
 ڈیکارٹ کا، ۱۹۶
 متکافی شکل میں استحاله، ۱۹۹
 متشکل تفاعلوں کے ذریعہ حل، ۲۰۴
 اصولوں کی نوعیت، ۲۱۲، ۳۱۹
 حقیقی اصلیں، کعبی کی، ۱۲۰
 چار درجی کی، ۲۱۳
 عام صورت میں، ۳۱۷
 خارج قسمت اور باقی، جبکہ کثیرالارتقام کو شنائی جملہ سے تقسیم کیا جائے
 خاص اصلیں، شنائی مساداتوں کی، ۱۳۸
 خیالی اصلیں، ۲۷
 زوج زوج داخل ہوتی ہیں، ۳۳
 کعبی کی، ۳۹۴
 چار درجی کی، ۳۹۹، ۴۰۳
 ختام، ۴۰۹
 دارون، جی۔ ایچ، مثال مل شدہ، ۳۷۲
 ڈیکارٹ، قانون علامت، ۳۶، ۳۸

- ڈیکارٹ، چار درجی کا حل، ۱۹۶
 اضافے جبر و مقابلہ میں، ۴۱۱
 ڈی گوا، خیالی اصولوں کے لئے قاعدہ، ۲۹۶
 رابرٹس، دو تعبیروں سے ماخوذ مساوات پر، ۱۷۳
 چار درجی کی مربع دار فرقوں کی مساوات پر، ۲۱۱
 تھامز ریلے، ۲۲۷
 چار درجی اور پانچ درجی پر مثال، ۳۲۳
 رتبہ، متشکل تفاعلوں کا، ۲۵۷
 رول کا مسئلہ، ۲۳۳
 سامن، ۴۱۴
 سمت، ملقب عدد کی، ۳۷۸
 اسکا ٹیگر، ۳۸۶
 مسن، ۴۱۱
 سیپیو فیرو، ۴۰۹
 سیرٹ، ۴۱۳
 ضعیفی اصلیں، ۴۲۲، ۲۳۵، ۲۳۶
 انہی تعین، مقسوم علیہم کے طریقہ سے، ۳۳۶
 عددی مساواتیں، ۳، ۳۲۶
 انہی متوافق اصلیں، ۳۲۷
 انہی ضعیفی اصلیں، ۲۳۶، ۳۳۶
 اصولوں کے تقرب کے طریقے، ۳۴۱، ۳۴۳، ۳۶۵
 ابھی حل پر نوٹ، ۴۱۵
 بنیادی مسئلہ پر نوٹ، اصولوں سے متعلق، ۴۲۱
 عرب، ۴۰۹
 فلاریڈو، ۴۱۰

- فوریر، اسکا مسئلہ، ۲۸۳، ۴۱۹
 خیالی اصولوں پر اطلاق، ۲۹۲
 نتائج صریح، ۲۹۶
 فیبراری، چار درجہ کا حل، ۱۹۰، ۴۱۱
 قاعدہ، ڈیکارٹ کا، علامتوں کا، ۳۶، ۲۹۷
 ڈی گوا کا، ۲۹۶
 دہری علامت کا، ۲۹۷
 کارڈن، کعبی کا حل، ۱۵۹
 تارنا گلیا سے اسکے تعلقات، ۴۱۰
 کثیرالازقام، عام خواص، ۷، ۹
 انکی شکل میں تبدیلی، ۱۰
 انکا تسلسل، ۱۳
 انکی تریسمی تعبیر، ۱۸
 اعظم اور اقل قیمتیں، ۲۳
 کعبی، ۱۰۱
 فرقوں کی مساوات، ۱۱۶
 اصولوں کی نوعیت کی جانچ، ۱۱۹
 کارڈن کا حل، ۱۵۹
 دو مکعبوں کے فرق کے طور پر، ۱۶۲
 متشاكل تفاضلوں کے ذریعہ حل، ۱۶۴
 اصولوں کا ہم رسم رشتہ، ۱۷۶
 کلفرڈ، اس مسئلہ پر کہ ہر مساوات کی ایک اصل ہوتی ہے، ۴۲۳
 کوشی، اسکا مسئلہ، ۳۸۹
 کولا، ۴۱۰، ۴۱۱
 گاس، شنائی مساواتیں، ۱۴۹

- گریٹھائیڈ، چاردرجی پر، ۲۰۱
 لگرائج، فرقوں کی مساوات، ۲۰۹
 اصولوں کے تقرب کے لئے اسکا کسر مسلسل کا طریقہ، ۳۶۵
 مساواتوں کے حل پر، ۴۱۳
 اسکا مقالہ ”عددی مساواتوں پر“ ۲۰۹، ۴۱۶، ۴۲۲
 لوکس ڈی برگو، ۴۰۹
 لیونارڈو، ۴۰۹
 متجانس حاصل ضرب، ۲۶۵
 متشاکل تفاعل، تعریفات، ۶۳
 متعلقہ مسائل، ۷۳
 انکے ذریعہ استحالة، ۱۰۸
 سروں کی رقوم میں، ۲۴۸
 انکار تہ اور وزن، ۷۳، ۲۵۶
 انکو محسوب کرنا، ۶۵، ۲۵۹
 متغیر، اسکی تبدیلی سے کثیر الارقام کی شکل میں تبدیلی، ۱۰
 ملحق، ۳۸۲
 متکا فی اصلیں اور متکا فی مساواتیں، ۸۸
 متکا فی مساواتوں کا حل، ۱۳۰
 چاردرجی کا استحالة متکا فی شکل میں، ۱۹۹
 متوافق اصلیں، ۳۲۷
 مجموعے، اصولوں کی قوتوں کے:
 نیوٹن کا مسئلہ، ۲۴۵
 سروں کی رقوم ہیں، ۲۵۱
 سروں کو انکی رقوم میں بیان کرنا، ۲۵۲
 محول کعبی، ۱۷۹

ساوات ' مربع دار فرقوں کی :

کعبی کی ' ۱۱۶

عام ساوات کی ' ۱۲۱

چار درجہ کی ' ۲۰۹

ساوات جبکی اصلیں دی ہوئی ساوات کی اصلوں کی قوتیں ہو ' ۱۱۰

سادہ اصلیں ' ۳۲

شرط ' کعبی کی صورت میں ' ۱۲۰

چار درجہ کی صورت میں ' ۲۱۲

تعیین ' ۲۳۶

مقسوم علیہم کے طریقہ سے ' ۳۱۲

مشتق تفاعل ' ۱۰

ترسیمی تعبیر ' ۲۲۹

اصلوں کی رقوم میں ' ۲۳۳

مقسوم علیہم ' نیوٹن کا طریقہ ' ۳۲۸

مقیاس ' ملف عددوں کا ' ۳۴۸

ملف اصلیں ' عددی ساوا تون کی ' ۳۹۴

کعبی کی ' ۳۹۵ ' ۳۹۶

چار درجہ ' ۳۹۹ ' ۴۰۰

ملف عدد ' ۲۸ ' ۳۴۴

ترسیمی تعبیر ' ۳۴۴

جمع اور تفریق ' ۳۴۹

ضرب اور تقسیم ' ۳۸۱

دیگر اعمال ' ۳۸۲

ملف تغیر ' ۳۸۲ ' ۳۸۵

تفاعل کا تسلسل ' ۳۸۵

- منطق صحیح تفاعل کا تسلسل، ۱۳
 میالت، اس مسئلہ پر کہ ہر مسادات کی ایک اصل ہوتی ہے، ۴۲۳
 نیوٹن، اصولوں کی قوتوں کے مجموعوں پر اس کا مسئلہ ۲۴۵
 انتہائیں معلوم کرنا، ۲۹۷، ۲۹۶
 مقسوم علیہم کا طریقہ، ۳۲۸
 تقرب کا طریقہ، ۳۲۱
 وانڈرمانڈ، ۴۱۲
 وانڈرل، ۴۱۳
 وزن، متشاکل تفاعلوں کا، ۷۳، ۲۵۶
 ویٹا، ۴۱۵
 یولر، چار درجہ کا حل، ۱۷۷
 اس کا اصول کبھی، ۱۷۹
 اس کے کبھی کے لئے اسٹرم کے تفاعلات، ۳۷۶
 اس کی الجبر کی اشاعت، ۴۱۱
 ہارلی، ۴۱۳
 ہارنر، عددی مساداتوں کو حل کرنے کا طریقہ، ۳۴۳
 عمل کا اختصار، ۳۵۴
 تقریباً مساوی اصولوں کی صورت میں اسکے طریقہ کا استعمال، ۳۵۹
 عددی مساداتوں کے حل میں اس کے اضافے، ۴۱۹
 ہرمانیٹ، ۴۱۳
 ہم رسم استعمال، ۱۰۶
 ہم رسم کبھی کی اصولوں کا رشتہ، ۱۷۶

اصطلاحات

مساواتوں کا نظریہ

جلد اول

Absolute term

رقم مطلق

Ambiguous sign

بہم علامت

Amplitude

سعت

Binomial

ثنائی، دو رتی

Biquadratic

چار درجی

Circular functions

دائری تفاعل

Commensurable roots

متوافق اصلیں

Complex number

ملقف عدد

Complex variable

ملقف متغیر

Covariant

ہم متغیر

Derived function

شتق تفاعل

Dialytic

بین تحلیلی

Equation of squared differences

مربع دار فرقوں کی مساوات

False position

باطل محل، کاذب محل

Fundamental Equation

بنیادی مساوات

| | |
|---|--|
| Homogeneous products | متجانس حاصل ضرب |
| Homographic transformation | ہم رسم استحالہ |
| Incommensurable roots | متناہیں اصلیں |
| Inferior limit | سفلی انتہا |
| Integral values | صحیح عددی قیمتیں |
| Invariants | غیر متغیر |
| Leading coefficients | صدر سر، فائق سر |
| Limiting equations | انتہائی مساواتیں |
| Method of divisors | مقسوم علیہم کا طریقہ، مقسوموں کا طریقہ |
| Modulus | مقیاس |
| Multiple roots | ضعفی اصلیں |
| Numerical equations | عددی مساواتیں |
| Order and weight of symmetric functions | متشاکل تفاعلوں کا رتبہ اور وزن |
| Polynomial | کثیر الارقام، کثیر رمتی |
| Precession | استقبال |
| Quadrature | تزیج |
| Quantic | کثیر درجی |
| Quintic | پنج درجی |
| Rational & Integral function | منطق صحیح تفاعل، منطق اور مکملہ تفاعل |
| Reciprocal | متکافی |
| Reducing cubic | محول کیسی |
| Sextic | چھ درجی، شش درجی |
| Special roots | خاص اصلیں |

Superior limit

علوی انتہا

Symmetric function

متشاکل تقاعل

Transform

تحویل کرنا

Transformation

استحالہ

Transformed

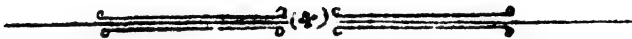
استحالہ شدہ، ستحویل

Trial divisor

آزمائشی مقسوم علیہ یا مقسم

Trinomial

سہ رمتی



۱۔ اگر کسی کو "گلزارِ عشق" ہو تو شادی
 چاہئے نہ نکاح نہ کرے
 ۲۔ اگر کسی کو "گلزارِ عشق" ہو تو شادی
 چاہئے نہ نکاح نہ کرے
 ۳۔ اگر کسی کو "گلزارِ عشق" ہو تو شادی
 چاہئے نہ نکاح نہ کرے
 ۴۔ اگر کسی کو "گلزارِ عشق" ہو تو شادی
 چاہئے نہ نکاح نہ کرے
 ۵۔ اگر کسی کو "گلزارِ عشق" ہو تو شادی
 چاہئے نہ نکاح نہ کرے
 ۶۔ اگر کسی کو "گلزارِ عشق" ہو تو شادی
 چاہئے نہ نکاح نہ کرے
 ۷۔ اگر کسی کو "گلزارِ عشق" ہو تو شادی
 چاہئے نہ نکاح نہ کرے
 ۸۔ اگر کسی کو "گلزارِ عشق" ہو تو شادی
 چاہئے نہ نکاح نہ کرے
 ۹۔ اگر کسی کو "گلزارِ عشق" ہو تو شادی
 چاہئے نہ نکاح نہ کرے
 ۱۰۔ اگر کسی کو "گلزارِ عشق" ہو تو شادی
 چاہئے نہ نکاح نہ کرے

